**Відділ освіти, молоді та спорту**

**Пирятинської міської ради Полтавської області**

**Пирятинський ліцей Пирятинської міської ради**

**Полтавської області**

**Яременко Олена Костянтинівна,**

**вчитель математики**

**Методика підготовки учнів 5-6 класів до участі в математичних олімпіадах та конкурсах**

**Пирятин – 2022**



**Яременко Олена Костянтинівна,**

вчитель математики Пирятинського ліцею Пирятинської міської ради Полтавської області,

стаж за фахом – 26 років,

спеціаліст вищої кваліфікаційної категорії,

старший вчитель.

Методичний посібник присвячений психолого-педагогічним та методичним особливостям підготовки до олімпіад та конкурсів з математики обдарованих учнів 5—6 класів. Серед різноманітних напрямків підготовки докладно розглянуто методику організації та проведення шкільного математичного гуртка. Запропоновано докладні розробки 8 гурткових занять, основою яких є розв’язування олімпіадних завдань. Посібник адресований вчителям закладів загальної середньої освіти.

**Рецензенти:**

Яремченко Сергій Миколайович, старший науковий співробітник відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України д.ф.-м.н., с.н.с.

Дедяєва Людмила Вікторівна, завідувачка кафедри математики, фізики та інформатики Пирятинського ліцею, вчитель інформатики та математики Пирятинського ліцею міста Пирятин Полтавської області, спеціаліст вищої кваліфікаційної категорії.

Схвалено педагогічною радою Пирятинського ліцею Пирятинської міської ради Полтавської області (протокол № 02 від 18 січня 2022 року)

**ЗМІСТ**

[ВСТУП 4](#_Toc94104227)

[РОЗДІЛ 1 ОСОБЛИВОСТІ ПРОВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД ТА КОНКУРСІВ 8](#_Toc94104228)

[РОЗДІЛ 2 ОСНОВНІ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ПІДГОТОВКИ ОБДАРОВАНИХ УЧНІВ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД ТА КОНКУРСІВ 11](#_Toc94104229)

[2.1 Психолого-педагогічні особливості підготовки учнів до математичних змагань 11](#_Toc94104230)

[2.2 Методичні особливості підготовки учнів до математичних змагань 15](#_Toc94104231)

[РОЗДІЛ 3 ОСОБЛИВОСТІ ПОЗАКЛАСНОЇ (ГУРТКОВОЇ) РОБОТИ З ОБДАРОВАНИМИ УЧНЯМИ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЛІМПІАД ТА КОНКУРСІВ 21](#_Toc94104232)

[3.1 Позакласна (гурткова) робота з математики 21](#_Toc94104233)

[3.2 Програма для занять математичного гуртка у 5 – 6 класах 26](#_Toc94104234)

[3.3 Завдання для занять математичного гуртка 32](#_Toc94104235)

[3.3.1 Заняття з теми «Задачі на дільники та кратні, використання різних ознак подільності чисел» 33](#_Toc94104236)

[3.3.2 Заняття з теми «Задачі, що розв’язуються з кінця» 39](#_Toc94104237)

[3.3.3 Заняття з теми «Математичні ребуси» 45](#_Toc94104238)

[3.3.4 Заняття з теми «Інваріанти» 51](#_Toc94104239)

[3.3.5 Заняття з теми «Принцип Діріхле» 59](#_Toc94104240)

[3.3.6 Заняття з теми «Логічні завдання» 67](#_Toc94104241)

[3.3.8 Заняття з теми «Зважування» 81](#_Toc94104242)

[ВИСНОВКИ 88](#_Toc94104243)

[СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 90](#_Toc94104244)

ВСТУП

В умовах сучасного світу існує велика потреба в талановитих особистостях, які можуть креативно мислити. Школа, яка відповідала б сучасним тенденціям, має бути спрямована значною мірою на розвиток особистості, її пізнавальних та творчих здібностей відповідно до інтелектуальних, психологічних, фізичних особливостей кожного здобувача освіти.

Ефективним засобом розвитку, виявлення здібностей та інтересів учнів із різними типами обдарованості є предметні олімпіади та конкурси.

Математика займає особливе місце в освіті людини, що обумовлено величезною практичною значимістю математики, її можливостями в розвитку та формуванні мислення людини, внеском у створення уявлень про наукові методи пізнання дійсності. Як частина загальної освіти, серед предметів, що формують інтелект, математика беззаперечно посідає перше місце.

Розвиток сучасної математики неможливий без постійного залучення молодих перспективних учених. А для цього необхідно всіляко залучати здібних учнів до поглибленого вивчення математики, в тому числі за допомогою різноманітних математичних конкурсів та олімпіад.

Математичні змагання школярів в Україні мають велику історію та традицію. Останніми роками значно просунувся розвиток олімпіад та конкурсів завдяки використанню нових інформаційних та комунікаційних технологій. Так, широку популярність здобули Міжнародний конкурс-гра «Кенгуру», інтернет-олімпіади «На урок», «Занзібар», математичні бої, турніри міст, математичні конкурси на базі окремих закладів освіти тощо.

Проте недостатньо розроблено питання участі та підготовки до олімпіад та конкурсів школярів початкової школи та учнів 5-6 класів, особливо серед «незвичайних» дітей, хоча останнім часом спостерігається тенденція зниження віку учасників таких змагань. Інтерес до математичних олімпіад, конкурсів, гурткових занять серед учнів 5-6 класів дуже високий. Разом з тим олімпіади, що існують на даний момент, конкурси для учнів саме цього віку проходять розрізнено, немає єдиного комплексного підходу до їх підготовки та проведення.

Відзначимо також, що в даний час вчителі відчувають нестачу сучасної методичної літератури, призначеної для роботи саме зі здібними учнями 5-6 класів з організації та проведення занять, олімпіад, конкурсів з математики.

Вчителі здійснюють підготовку учнів до олімпіад та конкурсів, спираючись на власний досвід, погляди, тобто, як правило, робота ведеться на емпіричному рівні без належної теоретичної бази. Одним із найскладніших моментів у навчанні залишається питання: як навчити учнів 10-11 років вирішувати нестандартні завдання?

Тим часом навчання розв’язуванню нестандартних завдань з урахуванням психологічних та фізичних особливостей обдарованих дітей на ранньому етапі при підготовці до олімпіад та конкурсів могло б розвивати математичні здібності, інтерес до предмета у школярів та гнучкість, варіативність мислення дитини, що необхідно як для подальшого вибудовування індивідуальних освітніх траєкторій, так і для адаптації обдарованих дітей у сучасному світі.

**Мета дослідження –** теоретичне обґрунтування та розробка методичних підходів до підготовки обдарованих учнів 5-6 класів та учнів з високою мотивацією до участі у математичних олімпіадах та конкурсах.

Виходячи з мети дослідження, було поставлено такі **завдання**:

1. Провести аналіз сучасного стану олімпіадного руху, а також теоретичних та методичних досліджень із розглянутої проблеми.

2. Виявити психолого-педагогічні особливості розвитку пізнавального інтересу та здібностей у школярів 5-6 класів, у тому числі у обдарованих дітей.

3. Визначити основні напрями та вимоги до вдосконалення підготовки учнів 5-6 класів до математичних олімпіад та конкурсів.

4. Розробити методичні підходи до навчання розв’язуванню нестандартних завдань у 5-6 класах, зокрема під час занять математичного гуртка.

РОЗДІЛ 1  
ОСОБЛИВОСТІ ПРОВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД ТА КОНКУРСІВ

Для математично обдарованих учнів, які захоплюються математикою, отримують задоволення від розв’язування нестандартних, «смачних» задач, недостатньо матеріалів звичайних підручників та рутинного розв’язування задач в класі серед однолітків. Тому вже більше століття у світі проводяться різноманітні математичні змагання. Найбільш популярними та визнаними є математичні олімпіади школярів. Перша щорічна міжнародна математична олімпіада (ММО, англ. ІМО, *International Mathematical Olympiad*) – найстаріша з міжнародних предметних олімпіад для учнів – вперше була проведена в Румунії у 1959 році, і з того часу проводиться щорічно (за виключенням 1980 року) [18].

Україна офіційно бере участь у Міжнародній математичній олімпіаді з 1993 року. У 2021 році українські школярі посіли шосте командне місце на 62-ій Міжнародній математичній олімпіаді серед 107 країн-учасниць, набравши 149 балів з 252 можливих. В активі української команди — три золоті, дві срібні та одна бронзова медаль [1]. Шосте місце наша команда посідала на ММО лише тричі: у 1997, 2007 і 2014 роках. А у 2018 році українці посіли четверте місце, що наразі є найкращим виступом на ММО. За всі 29 років участі української команди в ММО наші учні вибороли 42 золоті медалі, 71 срібну та 46 бронзових, а також дев’ять почесних відзнак [15].

Крім проведення різних етапів олімпіади з математики, в Україні останні 10-15 років набувають все більшої популярності й інші математичні змагання для учнів: «Кенгуру», «Занзібар», «Карібу», «Математичні бої», математичні конкурси на базі окремих освітніх закладів та різноманітні інтернет-олімпіади. Останні виявилися особливо актуальними у зв’язку з обставинами, викликаними пандемією в усьому світі.

Математичні олімпіади та конкурси не лише дають цінні матеріали для висновків про рівень математичної підготовки учнів та виявляють найбільш обдарованих та підготовлених школярів у галузі математики, а й стимулюють поглиблене вивчення предмета.

Основна мета математичних олімпіад та конкурсів серед школярів:

* виявлення талановитих учнів;
* розвиток інтересу учнів до вивчення математики;
* підвищення математичної культури, інтелектуального рівня учнів;
* створення необхідних умов підтримки обдарованих дітей.

На відміну від конкурсів, написання рефератів або дослідницьких робіт, олімпіади охоплюють дуже широке коло знань з математики і сприяють формуванню ширшої ерудиції, чого так прагне будь-який вчитель.

У математичних олімпіадах основою успіху є не просто сума конкретних знань учня, а здатність логічно мислити, вміння створити за короткий термін досить складну і, головне, нову для учня логічну конструкцію.

Математичні конкурси, як правило, є доступними для більшої кількості учнів, тому вони допомагають формувати інтерес до математики та задоволення від успішного розв’язування математичних завдань у більш широкої учнівської аудиторії.

РОЗДІЛ 2  
ОСНОВНІ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ПІДГОТОВКИ ОБДАРОВАНИХ УЧНІВ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД ТА КОНКУРСІВ

2.1 Психолого-педагогічні особливості підготовки учнів до математичних змагань

Психолого-педагогічний аспект проблеми обдарованості досліджували Л. Венгер, П. Гальперін, Г. Костюк, О. Леонтьєв та інші. У дидактичних дослідженнях проблема навчання обдарованих дітей розглядалася в основному з позицій удосконалення форм, методів та засобів організації навчальної роботи учнів. Головним принципом, покладеним в основу побудови навчального процесу, справедливо визнавалася індивідуалізація навчання (М. Бурда, С. Гончаренко, І Лернер, П. Сікорський, М. Скаткин, З. Слєпкань). При цьому акцент робився на доборі форм, методів і засобів навчання, які використовуються в організації навчального процесу, а також на складанні індивідуальних навчальних планів та програм, що включають відповідні спеціальні завдання, видання навчальної і методичної літератури. Крім того, для організації такої роботи доцільним вважається створення селективних класів і шкіл, що дозволить реалізувати творчий потенціал і розвиток здібностей обдарованих дітей [6].

Серед психолого-педагогічних досліджень, проведених із математично обдарованими дітьми, особливо цікавою є книга В.А. Крутецького «Психологія математичних здібностей школярів», одна з небагатьох книг з психології, що присвячена детальному аналізу математичних здібностей. Проводячи свої дослідження протягом 12 років, В. А. Крутецький отримав розширену характеристику компонентів структури математичних здібностей учнів та виявив специфічні особливості їх формування на різних вікових етапах навчання математики в школі. Глава VII його книги саме присвячена віковим особливостям компонентів математичних здібностей. За виключенням випадків особливої обдарованості, для переважної більшості учнів 1 – 4 класів не можна ще говорити про сформованість структури математичних здібностей. У початкових класах формуються лише окремі компоненти таких здібностей. У віці 9 – 11 років лише формується тенденція до формалізації сприйняття, виділення формальної структури. Саме у такому віці починає формуватися узагальнення індуктивного характеру – від окремого до невідомого загального. Згорнутість, скороченість міркувань є специфічною для старших школярів, у середньому шкільному віці проявляється лише для самих простих завдань. Характерним для учнів 5 – 6 класів є наступна особливість гнучкості розумового процесу – дитина шукає альтернативний спосіб розв’язання задачі не з власної ініціативи, а після підказки вчителя, «багатьом із них неприйнятна сама думка у тому, що завдання може мати кілька рішень (і всі правильні)» [10, с.371]. Прагнення до раціональності («витонченості» розв’язків) починає проявлятися лише у середньому шкільному віці, лише найздібніші учні оцінювали різні розв’язання як простіше, і складніше, краще і гірше, виходячи при цьому лише з кількості виконаних операцій [10, с.372]. Проявів математичної пам’яті у її розвинених формах (коли запам’ятовуються лише узагальнення та розумові схеми) у молодшому віці не спостерігалося. Здібні учні зазвичай однаково запам’ятовують і конкретні дані, і відношення. З часом дедалі більшого значення набуває запам’ятовування відношень, дедалі менше – запам’ятовування конкретних даних.

Водночас В. А. Крутецький в результатах своїх досліджень звертав увагу на те, що зміна змісту та методики викладання може значно змістити розвиток математичних здібностей у більш молодший вік.

Отже, можна зробити висновок, що період 5-6 класів є важливим етапом для розвитку математичних здібностей учнів, і не варто відкладати підготовку здібних учнів до математичних конкурсів та олімпіад на більш пізній час, чекаючи, поки в них «чарівним» чином сформуються необхідні для цього дані. Саме в цей період важливо починати формувати вміння та навички, необхідні для успішного оволодіння математичними таємницями.

Серед психологічних особливостей п’яти-шестикласників виділимо ті, на які варто спиратися під час створення системи підготовки до олімпіад та конкурсів. Це такі особливості:

1) у період навчання у початковій школі (до 9 – 10 років) від дій із предметами дитина поступово переходить до виконання операцій із образами (символами) цих предметів; дитина у цьому віці уже може виконувати операції не безпосередньо за допомогою спроб і помилок, а спочатку подумки; може робити дії у зворотній послідовності; діти цього віку здатні впорядковувати наявні предмети, опановують принцип збереження, проте операції конкретні і обмежені життєвим досвідом дитини;

2) приблизно в 11 – 12 років дитина переходить до фінальної стадії розумового розвитку (стадія «формальних операцій»), коли стає можливим виконання розумових операцій, що вже не спираються на особистий конкретний досвід; дитина опановує абстрактно-понятійні способи мислення і до 14-15 років у неї формується логіка дорослої людини;

3) крім даних особливостей розвитку, серед обдарованих учнів часто проявляються наступні характеристики: згорнутість і варіативність мислення, довготривала пам’ять, розсіяна увага, психічні відхилення, неадекватна самооцінка та егоїзм.

Обдарованість не можна порівнювати з обсягом отриманих знань. Це значно складніше явище, яке включає природну інтуїцію, пізнавальну активність, нестандартність мислення, наполегливість. Обдарована дитина абсолютно не обов’язково буде мати високі оцінки з усіх шкільних предметів, хоча зустрічаються й такі учні. Але це радше виключення, ніж правило. Більш вірогідно, що яскрава обдарованість в одному виді діяльності може поєднуватися з досить помітним відставанням в іншому.

Як відзначається в статті О. Шаран, Л. Хлопан, «таким дітям властивий нестандартний погляд на навколишній світ, прагнення до критичного осмислення дійсності, намагання відійти від шаблонів і стереотипів,…, їм притаманна емоційна незбалансованість… Крім того, бажання займатися всім, до чого виникає інтерес, може стати причиною поверховості знань, перебільшене почуття страху – спричинити приховану обдарованість, а надмірне плекання, зайве опікування талантом – спричинити самозвеличення, відмову від подальшого самовдосконалення» [6].

2.2 Методичні особливості підготовки учнів до математичних змагань

Проаналізувавши дані психолого-фізіологічні положення та наявні в розпорядженні педагогів посібники по роботі з обдарованими дітьми з математики та підготовки їх до олімпіад, ми зробили висновок, що зазвичай їх зміст організовано наступним чином: це збірники завдань для учнів підвищеної складності, які згруповано за темами (або за роками проведення олімпіад). Такі посібники, як правило, містять стисле пояснення ідеї чи методу розв’язування виділених типів задач та добірку задач для самостійного розв’язування, до яких надаються відповіді.

При цьому основним методом навчання дітей залишається репродуктивний: запам’ятовування способу розв’язування заданого конкретного завдання та тренінг (повторення способу розв’язування при багаторазовому виконанні однотипних завдань).

Але «розвинена пам’ять ще не є освіченість, точна інформація ще не є знання» (У. Глассер). За рахунок засвоєння готових способів розв’язування різноманітних окремих завдань неможливо отримати розвиток здатності до самостійного знаходження способів розв’язання. Тому учень, зіштовхнувшись із завданням нового типу або підвищеної складності, часто зазнає невдачі при його розв’язуванні. Проте обдарована дитина не відмовляється від спроб розв’язання відразу, як звичайний школяр, а намагається знайти або й самостійно придумати спосіб, що приведе до розв’язку.

Як досягти успішної участі школяра в математичній олімпіаді чи математичному конкурсі? Для успіху у конкурсній математиці, звичайно, потрібно вміння вирішувати завдання, розв’язувати задачі. Успіх пов’язаний не тільки зі здібностями, а й зі знанням класичних олімпіадних завдань.

Олімпіадна задача з математики – це завдання підвищеної складності, нестандартне за формулюванням, та/або за методами розв’язання. Для успішного виконання завдань необхідно вміння логічно мислити, аналізувати умови нестандартних завдань, розбивати складні завдання на вже відомі підзадачі. Основною складністю для учасників математичних конкурсів та олімпіад є недостатнє вміння користуватися аналізом для пошуку розв’язання, відсутність навичок комбінування відомих способів розв’язування.

Тому до конкурсів, а особливо, математичної олімпіади треба серйозно готуватись. Щоб підготувати учнів до участі в олімпіадах та проводити олімпіади, вчителю необхідно додатково до уроків вести гуртки або факультативи; проводити велику підготовчу роботу; підбирати та виконувати різні завдання та завдання олімпіадного типу, детально знайомитися з різними питаннями математики, з новинками математичної літератури. Для підготовки школярів до олімпіад та конкурсів слід мати індивідуальний підхід до кожного учня і поступово, якщо говоримо про учнів 5-6 класів, основний наголос робити на самостійну роботу учня.

Під час підготовки до олімпіади чи конкурсу дуже важливо приділяти велику увагу та максимально заохочувати самостійну роботу школяра. Самостійний творчий пошук є найефективнішою формою підготовки до олімпіади. Можна багато індивідуально займатися з юним обдаруванням, показуючи методологію розв’язування нетрадиційних завдань, але якщо учень у певний момент не відчує бажання шукати нові знання для того, щоб розв’язувати все більш складні завдання, навряд чи участь в олімпіадах принесе йому задоволення та буде вдалою.

Як власний досвід участі в олімпіадах, так і досвід підготовки до математичних змагань учнів показує, що школярам для успішної участі в них потрібна особлива, окрема від урочної діяльності, підготовка. Особлива підготовка до олімпіади потрібна для учнів насамперед тому, що при їх організації та проведенні перевага надається оригінальним ідеям вирішення тих чи інших проблем із чітким їх обґрунтуванням, вибору оптимального методу виконання завдання, аргументованим висновкам тощо. До того ж учасникам олімпіад та конкурсів часто пропонуються завдання не лише з використанням понять, властивостей, теорем та законів, що включені до шкільної програми, але й такі завдання, що виходять за рамки навчальних програм, навіть поглибленого вивчення предмета.

Шкільні навчальні програми складені відповідно до вимог Державного стандарту повної загальної середньої освіти, в якому визначений оптимальний рівень навчальних компетенцій школярів, але вони зовсім не орієнтовані на можливості обдарованих учнів. Робота з сильними учнями з математики — робота штучна. Тому не обійтися без індивідуального підходу як під час уроку, так і поза уроком. І якщо в класі є кілька обдарованих дітей, які проявляють себе саме у розв’язуванні олімпіадних задач, то з ними необхідно організувати спеціальну роботу, яка буде спрямована на розвиток їх можливостей.

Дуже часто математично обдаровані учні виявляють небажання виконувати однотипні завдання на відпрацювання навичок. Їм не цікаво розв’язувати прості типові вправи, вони починають нудьгувати, і якщо вчитель не буде готовий вчасно запропонувати таким учням цікаві для них завдання, то існує ризик втратити їх зацікавленість математикою взагалі. У класі для таких дітей необхідно пропонувати інші, складніші завдання, які б несли значне інтелектуальне навантаження, але не займали водночас багато часу. Акцент у роботі з такими учнями повинен бути зроблений на самостійне навчання. Домашнє завдання слід пропонувати у такій формі, яка передбачає власний вибір не тільки щодо рівня складності та обсягу виконуваної роботи, а й щодо самого характеру роботи.

Це можуть бути як вигадування завдань до розділу, який є найцікавішим, так і розв’язування більш складних олімпіадних завдань. Звичайно, таких дітей потрібно охопити різними формами позакласної та позашкільної роботи, які б сприяли їхньому розвитку.

РОЗДІЛ 3  
ОСОБЛИВОСТІ ПОЗАКЛАСНОЇ (ГУРТКОВОЇ) РОБОТИ З ОБДАРОВАНИМИ УЧНЯМИ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЛІМПІАД ТА КОНКУРСІВ

3.1 Позакласна (гурткова) робота з математики

Найбільш важливими завданнями позакласної роботи на сучасному етапі розвитку школи можна вважати наступні:

* пробудження та розвиток сталого інтересу учнів до математики та її застосування;
* розширення та поглиблення знань учнів з програмного матеріалу;
* розвиток математичних здібностей та мислення учнів;
* розвиток навичок та уміння самостійно і творчо працювати з навчальною та науково-популярною літературою;
* створення активу, здатного надати вчителю математики допомогу в організації ефективного навчання всього класу;
* розширення та поглиблення уявлень учнів про практичне значення математики в техніці, економіці;
* розширення та поглиблення уявлень учнів про культурно-історичну цінність математики, про роль провідних учених-математиків у розвитку світової науки;
* здійснення індивідуалізації та диференціації;
* різнобічний розвиток особистості [19, с.30].

На жаль, сьогодні не в усіх школах для учнів 5 – 6 класів організовано математичні гуртки. Пояснити це можна різними причинами, у тому числі й такими:

* мало учнів, які бажають займатися у гуртках;
* не проводяться районні, а досить часто і шкільні, олімпіади у цих класах, тому вчителі не бачать сенсу готувати учнів до олімпіад;
* вчителі математики перевантажені, їм не оплачується проведення позакласної роботи тощо.

Математичний гурток, на нашу думку, є найбільш підходящою формою підготовки до участі у математичних олімпіадах та конкурсах у 5 – 6 класах. Математичний гурток – це об’єднання учнів під керівництвом вчителя, в рамках якого проводяться систематичні заняття з учнями у позаурочний час.

Поряд із підготовкою до математичних олімпіад та конкурсів основними цілями проведення гурткових занять є:

* розвиток інтересу до математики;
* поглиблення та розширення знань учнів з математики;
* розвиток математичного світогляду, мислення, дослідницьких умінь;
* виховання наполегливості, ініціативи.

Частково ці цілі реалізуються і на уроці математики, але остаточна та повна реалізація їх переноситься на позакласні заняття, насамперед на гуртки.

Для підготовки гурткового заняття вчителю необхідно провести наступну роботу:

1. Вивчити всі питання, намічені для розгляду на даному занятті.

2. Розв’язати всі підібрані завдання.

3. З’ясувати, що у запропонованому матеріалі є найбільш цікавим, а що – найбільш складним.

4. Розмістити завдання для розв’язання за ступенем складності. При цьому задач з великими, громіздкими викладками на заняття не варто брати. Акцент зробити на завдання з цікавою ідеєю.

5. Умови завдань краще надрукувати на окремих аркушах для кожного учня. Іноді можна запропонувати учням переформулювати текст завдань, вигадати самим нову фабулу тощо. Учням 5 – 6 класів (і навіть старшим) гарно «заходять» персоналізовані завдання, тобто коли ситуація задачі перенесена в знайому дітям ситуацію, герої задачі мають імена друзів тощо.

6. У разі виникнення серед учнів проблем при розв’язуванні завдання, треба передбачити просте завдання (підготовчу задачу).

7. Для реалізації диференційованого підходу застосовувати і завдання-«двійники» (тобто завдання з тією ж самою ідеєю, але різного рівня складності).

8. Застосовувати задачі з помилками, задачі, що містять матеріали сьогодення.

9. Використовувати випереджаючі завдання до наступних занять (як на самому занятті, так і вдома).

10. Мати завжди у запасі цікавий, захоплюючий матеріал.

11. Як домашнє завдання перший час пропонувати не більше 2 – 3 завдань. Якщо учні будуть їх активно розв’язувати, кількість завдань можна збільшити, але не занадто. Якщо ж не всі учні виявлять сумлінність при виконанні «зайвого» домашнього завдання, то краще залишити 2 – 3 задачі, причому навіть ці задачі задавати не завжди, а деякі із завдань пропонувати виконати за бажанням.

Бажано, щоб усі гуртківці брали участь у підготовці занять. З цією метою учням можна пропонувати як пояснення розв’язання деяких завдань іншим учням, так і підготовку невеликих виступів, доповідей за матеріалом, що виноситься на заняття [19, с.44].

При безпосередній підготовці учнів до математичних конкурсів та олімпіад необхідно акцентувати увагу учнів на наступних моментах:

* + як одне із завдань конкурсу будь-якого рівня може бути завдання, в умові якого фігурує рік проведення конкурсу чи олімпіади;
  + у конкурсних завданнях відсутні завдання із великими викладками;
  + у завданнях на доведення потрібне повне обґрунтування;
  + якщо в умові потрібно вказати всі можливі способи розв’язання, то від повноти кількості зазначених способів залежить кількість отриманих балів;
  + якщо в умові потрібно відповісти на запитання «Чи можна…?», то для відповіді достатньо навести один позитивний приклад, який задовольняє умову задачі, а для того, щоб дати відповідь «не можна», необхідно розглянути всі можливі випадки, узагальнюючи їх в доведення.

Безпосередньо при проведенні занять гуртка важливо враховувати психологічні особливості кожної окремої дитини, щоб вчасно направляти зусилля та емоції учня на пошук ідей для розв’язання задачі, допомогти не втратити віру у свої сили та можливості у разі виникнення труднощів.

3.2 Програма для занять математичного гуртка у 5 – 6 класах

Для вирішення завдань підготовки школярів до математичних конкурсів та олімпіад була розроблена програма для математичного гуртка.

Ця програма призначена для роботи з учнями 5–6 класів та використовувалася при проведенні занять математичного гуртка «Юний математик» для учнів 5-А (2020-2021 н. р.) та 6-А (2021-2022 н. р.) у Пирятинському ліцеї Пирятинської міської ради Полтавської області.

Курс призначений для розвитку математичних здібностей учнів, для формування елементів логічної та алгоритмічної грамотності, комунікативних умінь школярів із застосуванням колективних форм організації занять та використанням сучасних засобів навчання.

Створення на заняттях ситуацій активного пошуку, надання можливості зробити власне «відкриття», знайомство з оригінальними способами міркувань, оволодіння елементарними навичками дослідницької діяльності дозволять учням реалізувати свої можливості, набути впевненості у своїх силах.

Цілі курсу:

розширення світогляду, розвиток логічного мислення, формування якостей особистості, необхідних людині для повноцінного життя у сучасному суспільстві, властивих математичній діяльності: ясності і точності думки, критичності мислення, інтуїції, логічного мислення, елементів алгоритмічної культури, просторових уявлень, здатності до подолання труднощів.

Завдання курсу:

* закріпити досвід розв’язування різноманітних типів завдань із різних розділів курсу, у тому числі задач, що вимагають пошуку шляхів та способів розв’язання;
* формувати навички проведення дослідницької діяльності, вчити проводити експерименти, узагальнення, порівняння, аналіз, систематизацію;
* залучати учнів до ігрової комунікативної практичної діяльності;
* активізувати дослідницьку та пізнавальну діяльність учнів;
* підтримувати інтерес до додаткових занять математикою та бажання займатися самоосвітою, цим створити базу кожному учневі для подальших особистих успіхів;
* виховувати в учнів потребу у самостійному пошуку інформації.

Курс складається з наступних розділів.

**Розділ 1. Цікава арифметика**

Тема 1. Запис цифр та чисел інших народів.

Тема 2. Числа-велетні і числа-малюки.

Тема З. Вправи на швидкий рахунок.

Тема 4. Розв’язування задач на множині натуральних чисел

**Розділ 2. Логічні завдання**

Тема 1. Завдання, які вирішуються з кінця.

Тема 2. Принцип Діріхле.

Тема 3. Логічні завдання.

Тема 4. Задачі на переливання.

Тема 5. Задачі на зважування.

Тема 6. Задачі на рух.

**Розділ 3. Геометричні завдання**

Тема 1. Завдання на розрізання та переклеювання.

Тема 2. Завдання з сірниками.

Тема 3 Геометричні головоломки.

Тема 4. Побудова фігур, не відриваючи олівця. Найпростіші графи.

Тема 5. Завдання на розвиток просторового мислення.

**Розділ 4. Цікаві завдання**

Тема 1. Математичні фокуси.

Тема 2. Математичні ребуси.

Тема 3. Цікаві завдання на відсотки.

Тема 4 Лабіринти.

Тема 5. Софізми.

Зміст кожної теми можна доповнювати залежно від рівня підготовки учасників гурткових занять. Крім того, можна до пройдених у 5 класі тем повертатися знову у 6 класі, але додаючи значно складніші завдання, з урахуванням наявного рівня математичних знань учнів.

Пропонуємо короткий зміст розділів.

**Розділ 1. Цікава арифметика**.

Тема 1.

Запис цифр в інших країнах. Як люди навчилися рахувати. Старовинні системи запису чисел. Цифри інших народів.

Тема 2.

Числа-велетні та числа-малюки. Відкриття нуля. Ми живемо у світі великих чисел. Назви великих чисел. Розв’язування задач з великими та маленькими числами.

Тема 3.

Вправи на швидкі обчислення. Множення на 11, множення двоцифрових чисел, близьких до 100, ділення та множення на 5, 50, 25, 250. Е. Галуа, С. Ковалевська.

Тема 4.

Розв’язування задач на множині натуральних чисел. Числа натурального ряду. «Магічні квадрати». Задачі на дільники та кратні, використання різних ознак подільності чисел. Гра «Судоку» та її різні варіанти.

**Розділ 2. Логічні завдання**

Тема 1.

Задачі, які розв’язуються з кінця. Розв’язування сюжетних задач. Найпростіші задачі на стратегії гри. Первинні поняття про інваріанти. Задачі на збереження парності чисел.

Тема 2.

Принцип Діріхле та його застосування для розв’язування простих задач.

Тема 3.

Початкові поняття про висловлювання. Побудова заперечень висловлювання. Методи розв’язування логічних задач: з використанням таблиць, за допомогою міркувань. Найпростіші логічні задачі з шахами.

Тема 4.

Розв’язування текстових задач на переливання.

Тема 5.

Зважування. Розв’язування задач на визначення фальшивих монет або предметів різної ваги за допомогою кількох зважувань на чашкових вагах без гирь.

Тема 6.

Розв’язування текстових задач на рух: на зближення, на віддалення, рух в одному напрямку та в протилежних напрямках, рух за течією та проти течії річки.

**Розділ 3. Геометричні завдання**

Тема 1.

Завдання на розрізання та переклеювання.

Геометрія довкола нас. Геометрія на клітчастому папері.

Тема 2.

Завдання з сірниками. Розв’язування цікавих завдань із сірниками.

Тема 3

Геометричні головоломки. З історії геометрії: Архімед. Головоломки «Танграм», «Стомахіон».

Тема 4.

Побудова фігур, не відриваючи олівця. Завдання «про кенігсберзькі мости». Завдання на побудову фігур, одним розчерком олівця. Найпростіші графи. З історії математики: Л. Ейлер.

Тема 5.

Завдання для розвитку просторового мислення. Простір та розмірність. Куб та його властивості. Прямокутний паралелепіпед. Піраміда. Правильні багатогранники. Геометричні ілюзії.

**Розділ 4. Цікаві завдання**

Тема 1.

Математичні фокуси: «Вгадування числа». Приклади математичних фокусів.

Тема 2.

Математичні ребуси. Розв’язування завдань на відновлення цифр у записах обчислень.

Тема 3.

Цікаві задачі на відсотки. З історії математики. Відсотки у минулому та сьогоденні.

Розв’язування цікавих задач на відсотки (задачі на суміші, на «суху речовину» тощо).

Тема 4.

Лабіринти. З історії лабіринтів. Методи розв’язання лабіринтів: метод проб та помилок, метод закреслення глухих кутів, правило однієї руки.

Тема 5.

Софізми. Поняття софізму. Прості приклади софізмів.

3.3 Завдання для занять математичного гуртка

Запропоновані наступні задачі були розв’язані під час занять математичного гуртка у 5-А та 6-А класі Пирятинського ліцею у 2020-2021 та 2021-2022 н. р. Задачі розташовані у порядку зростання рівня складності. В окремих задачах використана «персоналізація» – імена реальних учасників гуртка.

3.3.1 Заняття з теми «Задачі на дільники та кратні, використання різних ознак подільності чисел»

**Робота за темою**

Вчитель пропонує учням для актуалізації знань пригадати ознаки подільності на 2, на 3, на 5, на 9 та на 10. Потім самостійно розв’язати задачу 1. Після її обговорення перейти до розв’язування інших задач.

**Задача 1.** На дошці записано число 645\*7235. Замініть \* цифрою так, щоб отримане число ділилося на 3. Якою цифрою треба замінити \*, щоб отримане число ділилося на 9? Чи може яке-небудь з отриманих чисел ділитися на 15?

***Розв’язання.*** *Сума чисел записаного числа дорівнює 32+\*. За ознакою подільності на три отримана сума має бути кратна трьом. Таким чином \* може бути цифрою 1, або цифрою 4, або цифрою 7.*

*Для того, щоб число ділилося на 9, сума його цифр повинна бути кратна дев’яти. Отже \* може бути лише цифрою 4.*

*Для того, щоб число ділилося на 15, воно повинно ділитися на 3 та на 5. Оскільки число, яке закінчується на цифру 5, кратне п’яти, то кожне з отриманих чисел (64517235; 64547235; 64577235) ділиться на 15.*

**Задача 2.** До числа 15 допишіть ліворуч та праворуч по одній цифрі так, щоб отримане число ділилося на 15.

***Розв’язання.*** *Щоб число ділилося на 15 воно повинно бути кратним 3 та 5, а отже закінчуватися цифрою 0 або 5 і сума його цифр повинна ділитися на три. Якщо остання цифра дорівнює 0, то сума цифр буде 6+перша цифра. Тоді першою цифрою може бути 3, 6 або 9. Якщо остання цифра дорівнює 5, то сума цифр буде 11+перша цифра. І тоді першою цифрою може бути 1, 4 або 7. Таким чином це будуть числа 3150; 6150; 9150; 1155; 4155; 7155.*

**Задача 3.** Знайдіть усі чотирицифрові числа, які діляться на 45 і мають дві середні цифри 9 та 7.

***Розв’язання.*** *Щоб число ділилося на 45, треба щоб воно ділилося на (остання цифра 0 або 5) та на 9 (сума цифр числа повинна ділитися на 9). Якщо остання цифра 0, то сума цифр буде 9+7+0+перша цифра=16+перша цифра. Тоді першою цифрою може бути лише 2. Якщо остання цифра 5, то сума цифр числа буде 21+перша цифра. Тоді першою цифрою може бути лише 6. Отже, це будуть числа 2970; 2790; 6975; 6795.*

**Задача 4.** Знайдіть найменше чотирицифрове число, яке ділиться націло на 9 і всі цифри якого різні. За тих же умов знайти найбільше чотирицифрове число.

***Розв’язання.*** *Найменше чотирицифрове число з першими трьома різними цифрами 123\*, сума його цифр буде 6+\*. Ця сума повинна ділитися на 9, отже остання цифра мала б бути 3. Але тоді це було б число 1233 – дві останні цифри співпадають, а це не задовольняє умову задачі. Отже треба змінити третю цифру. Цифри 4 і 5, аналогічно міркувань щодо цифри 3, не підходять. Якщо третя цифра буде 6, то сума цифр буде 9+\*. Замість \* може стояти цифра 0 або 9. Але найменшим буде саме число 1260.*

*Найбільше чотирицифрове число з різними цифрами, яке кратне 9 буде 987\*, сума його цифр 24+\*. Отже \* може бути лише 3. Тоді шукане число 9873.*

**Задача 5.** Знайти найменше (найбільше) чотирицифрове число, у якого всі цифри різні і воно ділиться на 45.

***Розв’язання.*** *Щоб число ділилося на 45, воно повинно ділитися і на 5, і на 9. Міркуючи аналогічно попередній задачі, отримаємо найменше число з різними цифрами 1260. Найбільше число, що задовольняє умову задачі, буде 9810.*

**Задача 6.** Сюжетна задача. Ковбой Джо зайшов у бар і замовив пляшку бренді за 3 долари, люльку за 6 доларів, три пакунки тютюну і дев’ять коробок водонепроникних сірників, вартості яких він не знав. Бармен назвав вартість покупки 11 доларів 80 центів, але Джо витяг револьвер. Бармен перерахував і виправив «помилку». Як Джо здогадався, що бармен хотів його обдурити?

***Розв’язання.*** *Оскільки вартості кожного виду товару кратні трьом, то і вся вартість покупки повинна ділитися на 3. Але бармен назвав суму, яка не ділиться на три, отже він збрехав.*

***Методичний коментар.*** *На момент, коли розв’язано як під час уроків, так і на занятті гуртка достатньо задач на використання ознак подільності на 2, 3, 5, 9 та 10, у дітей виникає питання «А чи існують ознаки подільності на інші числа?» Тоді варто, на нашу думку, запропонувати на занятті гуртка розглянути ознаки подільності на 4 та на 11.*

**Задача 7.** На дошці написане число \*\*\*\*\*7\*. Артем та Костя по черзі витирають будь-яку зірочку і на її місце записують деяку цифру. Якщо отримане таким чином число буде ділитися націло на 4, то переможе Костя. Чи зможе він перемогти, якщо починає гру?

***Розв’язання.*** *Відповідно до ознаки подільності на 4 записане на дошці число буде кратне чотирьом, якщо число 7\* буде ділитися на 4. Такі числа – 72 та 76. Тобто Кості потрібно при першому ході замість останньої зірочки поставити цифру 2 або 6. Тоді він переможе незалежно від ходів Артема.*

**Задача 8.** До числа 43 допишіть ліворуч та праворуч по одній цифрі так, щоб отримане число ділилося на 36.

***Розв’язання.*** *Щоб число ділилося на 36, воно повинно ділитися на 9 (сума цифр кратна 9) та число з останніх двох цифр повинно ділитися на 4. Тоді останньою цифрою може бути 2 або 6. Якщо остання цифра 2, то сума цифр буде 4+3+2+ перша цифра, тобто 9+ перша цифра. Отже першою цифрою може бути лише 9. Отримаємо число 9432.*

*Якщо остання цифра 6, то сума цифр 4+3+6+перша цифра = 13+перша цифра. Тоді перша цифра буде 5. Отримаємо число 5436.*

**Задача 9.** На дошці записане число 1234\*567890. Замініть \* цифрою так, щоб отримане число було кратне 11.

***Розв’язання.*** *У записаному числі сума цифр, які стоять на парних місцях 2+4+5+7+9 = 27, а сума цифр на непарних місцях дорівнює 1+3+\*+6+8+0 = 18+\*. Згідно з ознакою подільності на 11 різниця цих чисел повинна ділитися на 11. Ця різниця дорівнює \* - 9 і вона буде ділитися на 11 лише тоді, коли \* дорівнює 9. Отже шукане число буде 1234****9****567890.*

**Задача 10.** Знайдіть число , якщо воно ділиться на 99.

***Розв’язання.*** *Шукане число повинно ділитися і на 9, і на 11. Сума всіх його цифр 6+2+a+b+4+2+7 = 21+a+b має ділитися на 9. Це можливо, якщо a+b = 6 або a+b = 15.*

*Сума цифр на парних місцях буде 2+b+2 = 4+b. Сума цифр на непарних місцях буде 6+a+4+7 = 17+a. Різниця цих сум 13+a–b повинна ділитися на 11, отже b–a = 2 або a–b = 9. Враховуючи, що a та b цифри, отримаємо єдине можливе значення числа: 62****24****427.*

Наступну задачу можна запропонувати дітям у вигляді змагання в парах.

**Задача 11.** Ваня та Анюта записують двадцятицифрове число, використовуючи тільки цифри 1, 2, 3, 4, 5. Першу цифру пише Ваня, другу – Анюта, третю – знову Ваня і так далі. Анюта хоче отримати число, яке ділиться на 9. Чи зможе Ваня їй завадити? А якщо число тридцятицифрове?

***Розв’язання.*** *Якщо число двадцятицифрове, то Ваня зможе завадити Анюті наступним чином: першим ходом Ваня ставить 3,після кожного ходу Анюти Ваня дописує цифру, яка в сумі з попередньою дорівнюватиме 6. Тоді сума цифр числа перед останнім ходом Анюти дорівнюватиме 3+9⋅6 = 57, і вона не зможе зробити число кратним 9.*

*Якщо ж число тридцятицифрове, то Анюта зможе перемогти в будь-якому разі, дописуючи цифру так, щоб у кожній парі сума цифр дорівнювала 6. Тоді сума цифр отриманого числа дорівнюватиме 90, і воно буде ділитися на 9.*

Як **домашнє завдання** можна запропонувати придумати власні задачі на використання ознак подільності і розв’язати їх на початку наступного заняття.

3.3.2 Заняття з теми «Задачі, що розв’язуються з кінця»

**Робота за темою**

Вчитель пропонує учням для самостійного розв’язання задачі № 1-3. Після розбирання розв’язків задач № 1 і 2 можна запровадити поняття текстового завдання, сюжетного завдання та перейти до обговорення задачі № 3, яка може викликати проблеми. Показати її правильне розв’язання та зразки запису: за діями та за допомогою таблиці.

**Задача 1.** Батькові та синові разом 65 років. Син народився, коли батькові було 25 років. Який вік батька та сина?

***Розв’язання.*** *Оскільки син народився тоді, коли батькові було 25 років, то різниця у їхньому віці буде 25 років. Тоді 65 - 25 = 40 (років) - буде подвоєний вік сина, а отже, синові буде 20 років, а батькові 45.*

**Задача 2.** Кошеня Мурзик може з’їсти пачку сухого корму за 12 днів, кіт Васька - за 6 днів, а кошка Василіса - всього за 4 дні. На скільки днів їм вистачить усім разом пачки сухого корму?

***Розв’язання.*** *За умовою кішка Василіса з’їдає за 1 день 1/4 пачки корму. Кіт Васька за 1 день з’їдає 1/6 пачки корму. А кошеня Мурзик з’їсть лише 1/12 пачки. Таким чином, всі три кішки разом за день з’їдять 1/4+1/6+1/12=1/2 пачки. Тому однієї пачки їм вистачить на 2 дні.*

**Задача 3.** Троє хлопчиків мають по декілька яблук. Перший хлопчик дає іншим стільки яблук, скільки кожен із них має. Потім другий хлопчик дає двом іншим стільки яблук, скільки кожен з них тепер має; у свою чергу і третій дає кожному з двох інших стільки, скільки є у кожного у цей момент. Після цього у кожного з хлопчиків виявляється по 8 яблук. Скільки яблук було у кожного хлопчика спочатку?

***Розв’язання.*** *Розв’язуємо задачу з кінця за допомогою таблиці.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Номер хлопчика* | *1* | *2* | *3* |
| *Число яблук наприкінці* | *8* | *8* | *8* |
| *Число яблук до передачі їх третім хлопчиком* | *8:2=4* | *8:2=4* | *8+4+4=16* |
| *Число яблук до передачі їх другим хлопчиком* | *4:2=2* | *4+2+8=14* | *16:2=8* |
| *Число яблук спочатку* | *2+4+7=13* | *14:2=7* | *8:2=4* |

*Таким чином, спочатку яблук у першого, другого і третього хлопчиків було відповідно 13, 7 та 4.*

**Усні вправи**

Одна з необхідних навичок, яка важлива для правильного розв’язування текстових задач — це уважне читання умови завдання. Розв’яжемо декілька завдань.

**Задача 4.** Ви – водій автобуса. У автобусі спочатку було 23 пасажири. На першій зупинці вийшли 3 жінки та зайшли 5 чоловіків. На другій зупинці зайшли 4 чоловіки та вийшли 7 жінок. Скільки років водієві?

**Задача 5.** Яке слово з 11 літер усі відмінники пишуть неправильно?

**Задача 6.** Продаючи в магазині папугу, продавець пообіцяв, що птах повторюватиме кожне почуте ним слово. Покупець дуже зрадів, але, прийшовши додому, виявив, що папуга німий мов риба. Проте продавець не брехав. Як це могло бути?

**Задача 7.** Англійський офіцер, який повернувся з Китаю, заснув у церкві під час служби. Йому наснилося, що до нього наближається кат, щоб відрубати йому голову, і в той самий момент, коли шабля опускалася на шию нещасного, його дружина, бажаючи розбудити сплячого чоловіка, злегка доторкнулася до його шиї віялом. Потрясіння було настільки велике, що офіцер відразу помер. У цій історії, розказаній вдовою офіцера щось не так. що ж саме?

**Задача 8.** Славко вирішив купити Ані морозиво, але для покупки йому не вистачало 3 гривні, а Ані – всього лише 1 гривні. Тоді вони вирішили скласти свої гроші, але знову не вистачило 1 гривні на покупку навіть одного морозива. Скільки коштувала порція морозива?

**Самостійна робота**

**Задача 9.** Я задумав число, помножив його на два, додав три і отримав 17. Яке саме число я задумав?

**Задача 10.** Одного разу чорт запропонував ледарю заробити. «Щойно ти перейдеш через цей міст, — сказав він, — твої гроші подвоються. Можеш переходити по йому скільки хочеш разів, але після кожного переходу віддай мені за це 24 копійки». Ледар погодився і... після третього переходу залишився без грошей. Скільки грошей у нього було спочатку?

**Задача 11.** Група туристів вирушила у похід. Першого дня вони пройшли 1/3 шляху, другого дня — 1/3 залишку, а третього дня – 1/3 нового залишку. В результаті їм залишилося пройти 32 км. Яка довжина всього маршруту?

**Домашнє завдання**

**Задача 12.** Граючи в рулетку, Буратіно спершу подвоїв кількість грошей, потім втратив 10 сольдо, потім він потроїв кількість своїх грошей, а потім втратив 12 сольдо. Після цього в нього не залишилося жодного сольдо. З якою сумою Буратіно розпочинав гру?

**Задача 13.** Над озерами летіли гуси. На кожному озері сідала половина гусей і ще пів гусака, інші летіли далі. Усі сіли на семи озерах. Скільки було гусей?

**Задача 14.** Розв’яжіть ребус:

КОКА

+ КОЛА

ВОДА

**Розв’язання та відповіді**

**Задача 4.** Стільки, скільки вам років.

**Задача 5.** Слово «неправильно».

**Задача 6.** Або папуга глухий, або покупець не сказав жодного слова.

**Задача 7.** Якщо офіцер помер під час сну, то як його дружина дізналася, що йому снилося?

**Задача 8.** Морозиво коштувало 3 гривні, а у Славка не було жодної гривні.

**Задача 9.** Розв’язуємо задачу з кінця:

1) 17 - 3 = 14 - число перед додаванням 3;

2) 14: 2 = 7 – шукане число.

**Задача 10.** Завдання розв’язується з кінця. Оскільки після третього переходу у ледаря грошей не залишилося, тому після переходу мосту втретє у нього було 24 копійки, а до третього переходу мосту – 12 копійок. Тоді після другого переходу моста у нього було 12 + 24 = 36 (копійок), а до другого переходу мосту — 36 : 2 = 18 (копійок). Розмірковуючи аналогічно, отримаємо, що після першого переходу мосту у ледаря стало 18 + 24 = 42 (копійки), а перед першим переходом мосту - 42: 2 = 21 (копійка). Таким чином, у ледаря спочатку була 21 копійка.

**Задача 11.** Розв’язуємо задачу з кінця. Оскільки залишилося 32 км, а третього дня туристи пройшли залишок, то 32 км становитимуть 2/3 останнього залишку, тоді сам останній залишок дорівнюватиме 32 : 2/3 = 48 (км). Ці 48 км становитимуть 2/3 довжини маршруту, який залишилося пройти після першого дня. Тоді весь маршрут, який залишилося пройти, дорівнюватиме 48 : 2/3 = 72 (км). Ці 72 км складають знову 2/3, але вже всього маршруту туристів, а значить, довжина всього маршруту дорівнюватиме 72: 2/3 = 108 (км).

**Задача 12.** Завдання розв’язується за допомогою рівняння або з кінця.

(Відповідь: Буратіно мав на початок гри 7 сольдо.)

**Задача 13.** Оскільки на останньому озері сіли гуси, що залишилися, і більше не залишилося, то там сів 1 гусак. Якщо б сіли 2, то 1 гусак ще залишився б. Отже, до шостого озера підлітали (1+1/2)⋅2=3 (гуся). А до п’ятого (3+1/2)⋅2 = 7, до четвертого (7+1/2)⋅2= 15, до третього (15+1/2)⋅2= 31, до другого (31+1/2)⋅2 = 63, тоді до першого підлетіли (63+1/2)⋅2 = 127 (гусей).

**Задача 14.** 3930 + 3980 = 7910 (почати з А = 0, К < 5, оскільки О + О = О і О≠А, то О=9. Прирівнюючи К = 1, 2, 3, 4, отримаємо шуканий розв’язок).

***Методичний коментар.*** *У домашній роботі може викликати значні труднощі розв’язання задачі № 13. Тому на наступному занятті обов’язково зробити її спільне обговорення. Особливу увагу слід звернути на те, чому на останньому озері сів 1 гусак. Що було б, якби сіли 2 гусаки? Розібрати докладно, скільки підлетіло до шостого озера, скільки сіло, скільки залишилось. А після цього вже помітити закономірність та пояснити розв’язання всього завдання. Показати ще й інший варіант розв’язання (за допомогою рівняння)*

3.3.3 Заняття з теми «Математичні ребуси»

**Робота за темою**

Математичними ребусами називають завдання на відновлення записів обчислень. Умова математичного ребуса містить або повністю зашифрований запис (цифри замінені літерами), або лише частину запису (стерті цифри замінені точками або зірочками).

Записи відновлюються на підставі логічних міркувань. При цьому не можна обмежуватися пошуком тільки одного розв’язку. Розв’язування потрібно доводити до кінця, щоб переконатися, що немає інших розв’язків, або знайти всі розв’язки. Є математичні ребуси, які мають кілька розв’язків.

Після вступного слова вчитель пропонує учням подумати над розв’язанням задач №1-2. Потім разом з ними обговорює розв’язання даних завдань, звернувши увагу на основні прийоми розв’язування математичних ребусів.

**Задача 1.** Відновіть пошкоджені записи арифметичних дій:

а) \*\* б) \*\*

+ \* + \*\*

\*\*8 \*98

Розглядаючи цей різновид ребусів, слід звернути увагу на те, що сума двоцифрового і одноцифрового чисел є трицифровим числом, тому перша цифра у сумі буде 1. А число 1 \* 8 може бути отримане лише як сума найбільшого двоцифрового числа та найбільшого одноцифрового.

Аналогічно у другому випадку сума дорівнює 198. А так як доданки — двоцифрові числа і найбільше двоцифрове число буде 99, то розв’язком буде 99 + 99 = 198.

**Задача 2.** Розв’яжіть ребуси:

а) Д Р А М А б) К О Ш К А в) Ч А Й: А Й = 5

+Д Р А М А + К О Ш К А

Т Е А Т Р К О Ш К А

С О Б А К А

***Розв’язання.*** *а) Очевидно, Д < 4. У розряді тисяч маємо А+ А = А, отже, А = 0 (без переходу через розряд) або А = 9 (з переходом). Значення А = 0 не підходить, оскільки у розряді одиниць А + А = Р (отримуємо А = Р = 0). Значить, А = 9, Р = 8, Е = 7. Тоді 2М +1 = 10 + Т, Т < 9, отже, М = 5 або 6 (оскільки маємо перехід), а значення 7 і 8 вже зайняті літерами Е та Р. При М = 6 отримуємо розв’язок:*

*18969+18969=37938.*

*б) Оскільки КА + КА + КА закінчується на КА, то КА = 50, отже, К = 5, А = 0. Оскільки Ш + Ш + Ш + 1 закінчується на 0, то Ш = 3. Оскільки сума трьох чисел, що починаються на 5, може починатися лише з 1, то С = 1. Розглядаючи варіанти для О, отримуємо, що О = 6 або О = 7, отже, Б = 9 або Б = 2. Отже, отримуємо два варіанти розв’язку:*

*56350 57350*

*+56350 +57350*

*56350 57350*

*169050 172050*

*в) Цей приклад є найважчим. Для його розв’язання краще перейти від ділення до множення: 5 • АЙ = ЧАЙ, отже Ч • 100 + АЙ = АЙ • 5, і тоді Ч • 25 = АЙ. Оскільки АЙ – двоцифрове число, то Ч = 1; 2; 3. Для кожного Ч знаходимо розв’язок: 125; 250; 375. Таким чином, отримуємо три розв’язки: 125 : 25 =5; 250 : 50 =5;*

*375 : 75 = 5.*

**Усні вправи**

**Задача 3.** *Дайте добру пораду!* Президент країни вирішив звільнити свого прем’єр-міністра, але не хотів його ображати, та й особливого приводу не було. Нарешті, він придумав ось що. Коли прем’єр-міністр прийшов до президента, той сказав йому: «Я поклав у портфель 2 аркуші паперу. На одному написано «Залишайтеся», на іншому — «Йдіть». Листок, який ви не дивлячись витягнете з портфеля, вирішить вашу долю». Хитрий прем’єр-міністр здогадався, що на обох аркушах написано «Йдіть». Як йому уникнути відставки?

**Задача 4.** Два розбійники ділять здобич. Кожен упевнений, що міг би поділити здобич на 2 рівні частини, але другий йому не довіряє. Як розбійникам розділити здобич, щоб обоє залишилися задоволені?

**Задача 5.** Чи можна в аркуші зі звичайного зошита прорізати дірку так, щоб крізь неї міг пролізти кожен із вас?

**Задача 6.** Мандрівник потрапив у полон до кровожерливих дикунів. За законами племені кожного іноземця запитують про мету приїзду. Якщо він при цьому скаже правду - його з’їдять, а якщо збреше - втоплять у морі. Як мандрівнику залишитися живим?

**Самостійна робота.** *Розв’яжіть ребуси:*

**Задача 7.** 6 \*

× \* \* \*

\* \*

+ \* \*

\* \*

\* \* \*6

**Задача 8.** А

+ Б Б

А

С С С

**Задача 9.** СПОРТ

+СПОРТ

КРОСС

**Домашнє завдання**

**Задача 10.** Розв’яжіть ребус:

2\*

× \*2

\*8

+7 \*

7 \* 8

**Задача 11.** Розв’яжіть буквені ребуси:

БАЗАР+БАЗАР=КАВУНИ;

КНИГА+КНИГА+КНИГА=НАУКА;

КОРОВА+ТРАВА+ДОЯРКА=МОЛОКО.

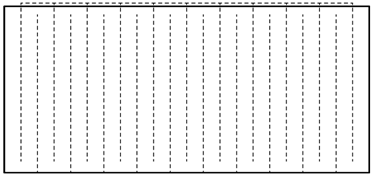
**Задача 12.** Складіть свій ребус.

**Розв’язання та відповіді**

**Задача 3.** Він може дістати один з аркушів і знищити його. Потім дістати другий і сказати: «Якщо на цьому аркуші написано „Йдіть", то на першому було «Залишайтеся».

**Задача 4.** Нехай один із розбійників розділить здобич на 2, на його думку, рівні частини, а другий вибере ту, яка, на його думку, більша.

**Задача 5.** Так. Листок згинають навпіл і проводять розрізи, як показано на рисунку.



Проведені пунктиром відрізки означають розрізи.

**Задача 6.** Мандрівник може сказати: «Я приїхав, щоб ви мене втопили. Значить, якщо його схочуть утопити, то, виходить, він сказав правду, а за правду з’їдають. Але якщо його схочуть з’їсти, то виходить, що він збрехав, а за брехню топлять. Залишається питання: чи будуть послідовні дикуни у своїй логіці?

**Задача 7.** 66⋅111 = 7326.

**Задача 8.**

6 А = 6; Б = 9; С = 1.

+ 99

6

111

**Задача 9.**

43972 С = 4; П = 3; Т = 2; Р = 7; К = 8;

+ 43972 О = 9.

87944

**Задача 10.** 24⋅32 = 768.

***Методичний коментар.*** *Для перевірки правильності розв’язання задачі №5 слід приготувати кілька моделей з розрізами, у тому числі й помилковими (у вигляді спіралі, без розрізу на місці згину тощо).*

3.3.4 Заняття з теми «Інваріанти»

**Робота за темою**

Ввести поняття інваріанту: інваріантом деякого перетворення називається величина або властивість, що не змінюється при цьому перетворенні. В якості інваріанту найчастіше розглядаються парність (непарність) і остача від ділення. Хоча зустрічаються ще й інші стандартні інваріанти: перестановки, розфарбування тощо. Причому застосування парності найчастіше зустрічається саме серед ідей під час розв’язування олімпіадних завдань.

Перед початком заняття варто пригадати означення парного та непарного чисел. Особливу увагу треба приділити абстрактному поняттю парності, пояснити, що означають терміни «однакова парність» та «різна парність». Розглянути найпростіші приклади. Наприклад, число *х + 2* має ту ж парність, що і число х (або обидва парні, або обидва непарні), а при додаванні одиниці парність числа змінюється. Далі можна сформулювати два важливих загальних твердження, на яких ґрунтується застосування ідеї парності та непарності.

**Лемма 1.** Парність суми кількох цілих чисел збігається з парністю кількості непарних доданків.

Приклади:

1. Число 1 + 2 + ... + 10 непарне, оскільки у сумі 5 непарних доданків.

2. Число 3 + 5 + 7 + 9+11 + 13 парне, оскільки у сумі 6 непарних доданків.

**Лемма 2.** Знак добутку кількох (відмінних від нуля) чисел визначається парністю кількості від’ємних співмножників.

Приклади:

1. Число (-1) • (-2) • (-3) • (-4 ) додатне, оскільки у добутку парна кількість від’ємних множників.

2. Число (-1) • 2 • (-3) • 4 • (-5) від’ємне, оскільки у добутку непарна кількість від’ємних множників.

Після цього можна докладно розібрати з учнями розв’язання наступних завдань.

**Задача 1.** Вчитель написав на аркуші паперу число 10. 15 учнів передають листок один одному, і кожен додає до числа або віднімає від нього одиницю - як хоче. Чи можна в результаті отримати число 0?

Перш ніж розібрати розв’язання даного завдання, запропонувати учням виконати цю операцію (при цьому залежно від числа учнів можна змінити числа 15 та 10). Помітити закономірність: після кожного ходу характер парності змінюється: після першого учня число стає непарним, після другого - парним, після третього – непарним. Тоді після п’ятнадцятого число буде непарним. Тому нуль наприкінці вийти не може.

**Задача 2.** На дошці записано 15 чисел: 8 нулів та 7 одиниць. Вам пропонується 14 разів поспіль виконати таку операцію: закреслити будь-які два числа, і якщо вони однакові, то дописати до чисел, що залишилися, нуль, а якщо різні – то одиницю. Яке число залишиться на дошці?

***Розв’язання.*** *Сума 15 вихідних чисел дорівнює 7. А 7 - число непарне. Розглянемо, яку суму чисел будемо отримувати після виконання операції. Якщо викреслити 2 нулі, то після дописування нуля на дошці буде 7 нулів та 7 одиниць. Сума цих 14 чисел буде непарною. Якщо викреслимо 2 одиниці, то на дошці залишиться після дописування нуля 9 нулів та 5 одиниць. Сума даних 14 чисел буде непарною. Зрештою, викреслюючи нуль і одиницю та приписуючи одиницю, ми отримаємо на дошці 7 нулів і 7 одиниць, сума яких знову є непарним числом. Таким чином, ми помічаємо, що після виконання цієї операції на дошці виходить на 1 число менше, причому сума чисел, що залишилися, весь час залишається непарною. Далі продовжуємо цю операцію, тобто переходимо від 14 чисел до 13 і так далі. Так як 1 - непарне число, а 0 - парне, то на дошці після виконання 14 разів зазначеної операції виходить непарне число, тобто 1.*

Висновок. Інваріантом у завданнях № 1 та 2 була парність суми чисел (вона непарна).

**Задача 3.** Всі кісточки доміно викладені в ланцюг (за правилами доміно). На одному кінці ланцюга виявилося 3 очка. Скільки очок на іншому кінці?

***Розв’язання.*** *Усього є сім кісточок з трійкою на кінці:*

*0-3, 1-3, 2-3, 3-3, 4-3, 5-3, 6-3. Кісточка 3-3 має трійку на обох кінцях. Усього виходить вісім трійок. Так як при грі в доміно в ланцюзі вони повинні розташовуватися парами, то на іншому кінці ланцюга буде 3 очка.*

Висновок. При розв’язуванні аналогічних завдань корисно іноді об’єкти розбивати на пари. Інваріантом тут є парність кількості трійок на всіх кісточках.

**Задача 4.** Квадрат розміром 5 × 5 заповнений числами так, що добуток чисел у кожному рядку від’ємний. Доведіть, що знайдеться стовпець, у якому добуток чисел також від’ємний.

***Розв’язання.*** *Оскільки добуток чисел у кожному рядку квадрата від’ємний, то і добуток усіх чисел у цьому квадраті буде від’ємним. Але, з іншого боку, добуток усіх чисел дорівнює і добутку чисел у стовпцях. А оскільки добуток усіх чисел від’ємний, то знайдеться стовпець, у якому добуток чисел є від’ємним.*

Висновок. Інваріант - знак добутку чисел (він від’ємний).

**Усні вправи**

**Задача 5.** Який годинник частіше показує точний час: той, які відстає на 1 хвилину на день, або той, який стоїть?

**Задача 6.** На дереві сиділо 20 ворон. Мисливець вистрілив і вбив двох ворон. Скільки ворон лишилося на дереві?

**Задача 7.** Математик, опинившись у невеликому містечку, вирішив підстригтися. У містечку було лише дві перукарні. Зазирнувши до одного майстра, він побачив, що в салоні брудно, сам майстер одягнений неохайно, погано поголений і недбало підстрижений. У салоні другого майстра все було чисто, а сам власник був бездоганно одягнений, чисто поголений та акуратно підстрижений. Проте математик вирушив стригтися до першого перукаря. Чому?

**Самостійна робота**

**Задача 8.** Чи можна розміняти купюру номіналом 50 гривень за допомогою 15 монет номіналом 1 і 5 гривень?

**Задача 9.** Кінь вийшов з поля *a1* шахівниці і через декілька ходів повернувся на нього. Доведіть, що він зробив парну кількість ходів.

**Задача 10.** 2022 людини вишикувалися в шеренгу. Чи завжди можна їх розставити за зростом, якщо за один хід дозволяється переставляти лише 2 людей, які стоять через одного?

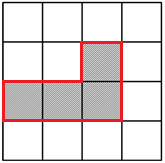
**Задача 11.** 16 кошиків розташували по колу. Чи можна у них розкласти 55 кавунів так, щоб кількість кавунів у будь-яких двох сусідніх кошиках відрізнялася на 1?

**Домашнє завдання**

**Задача 12.** На столі стоять 6 склянок. З них 5 стоять правильно, а одна перевернута догори дном. Дозволяється перевертати одночасно 4 будь-які склянки. Чи можливо всі склянки поставити правильно?

**Задача 13.** Мишкові вчитель математики поставив у щоденник оцінку «2». Мишко, бажаючи приховати від мами цей факт, порвав свій щоденник на 4 частини. Цього йому здалося замало, тому деякі з цих частин (можливо, і не всі) він знову порвав на 4 частини тощо. Мама знайшла 20 шматочків щоденника. Чи всі шматки знайшла мама?

**Задача 14.** Розріжте квадрат на 4 частини однакової форми і розміру так, щоб у кожну частину потрапило рівно по одному заштрихованому квадрату.



**Розв’язання та відповіді**

**Задача 5.** Другі, тому що перші показують правильний час 1 раз на 2 роки, а другі - 2 рази на день.

**Задача 6.** Жодної. В принципі, могло залишитися на дереві і 1, і 2 ворони, якщо при падінні на землю вони застрягли у гілках дерева. Інші ворони відлетіли.

**Задача 7.** Оскільки в місті всього дві перукарні, а другий майстер добре поголений і акуратно підстрижений, то підстриг його перший майстер.

**Задача 8.** Ні, оскільки сума 15 непарних чисел – число непарне, а 50 - число парне.

**Задача 9.** При кожному своєму ході кінь змінює колір поля, тому при поверненні назад він має зробити парне число ходів.

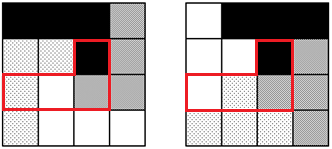
**Задача 10.** Не завжди. При перестановці зберігається парність номера місця. Тому якщо найвища людина, наприклад, стоїть другою, то вона ніколи не стане першою. Тут число 2022 ролі не грає.

**Задача 11.** Оскільки число кавунів у сусідніх кошиках відрізняється на 1, то парність числа кавунів у цих кошиках буде різною. Тоді парність числа кавунів у кошиках буде чергуватись, тому в половині кошиків буде парне число кавунів, а у половині - непарне. Тоді загальна кількість кавунів у 8 кошиках з парним числом кавунів і в 8 кошиках з непарним числом кавунів буде парною. За умовою всього кавунів 55, непарне число. Отже, розкласти не можна.

**Задача 12.** Ні, тому що в будь-якому випадку кількість перевернутих догори дном склянок буде числом непарним.

**Задача 13.** Оскільки кількість шматків могла бути 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22, то мати знайшла не всі шматки.

**Задача 14.** Два варіанти розв’язку наведено на рисунках.



***Методичний коментар.*** *У зв’язку з тим, що учні можуть навчатися у початковій школі та у 5—6 класах за різними програмами та різними підручниками, вчителю, можливо, доведеться ввести поняття від’ємного числа або не розв’язувати задачу № 4. При розборі домашнього завдання № 13 варто звернути увагу, що це завдання можна було розв’язати інакше, помітивши, що кількість шматків, яка могла бути отримана, записують у вигляді 3p+1, а число 20 = 6⋅3 + 2. Отримуємо різні остачі від ділення на 3. Остачі від ділення також можуть бути інваріантом, але завдання на застосування даного та інших інваріантів варто, на нашу думку, розглянути пізніше. Також бажано для розбору розв’язання задачі № 8 мати шахівницю (або її зображення).*

3.3.5 Заняття з теми «Принцип Діріхле»

**Робота за темою**

Вступне слово вчителя. При розв’язуванні різних математичних завдань застосовується спеціальний метод, який отримав назву: «принцип Діріхле». Існує кілька формулювань цього принципу. Найпопулярніше наступне: «Якщо в *n* клітках сидить *m* зайців, причому *m > n*, то хоча б в одній клітці сидять принаймні двоє зайців». Доводиться цей принцип Діріхле легко, методом доведення від супротивного, який учні 7 класу вивчають під час уроків, але здібних учнів 5-6 класів також можна ознайомити з таким способом доведення саме під час занять математичного гуртка. Тому деякі із завдань, які вирішуються за допомогою принципу Діріхле, також можна розв’язати, використовуючи метод доведення від супротивного, але не всі.

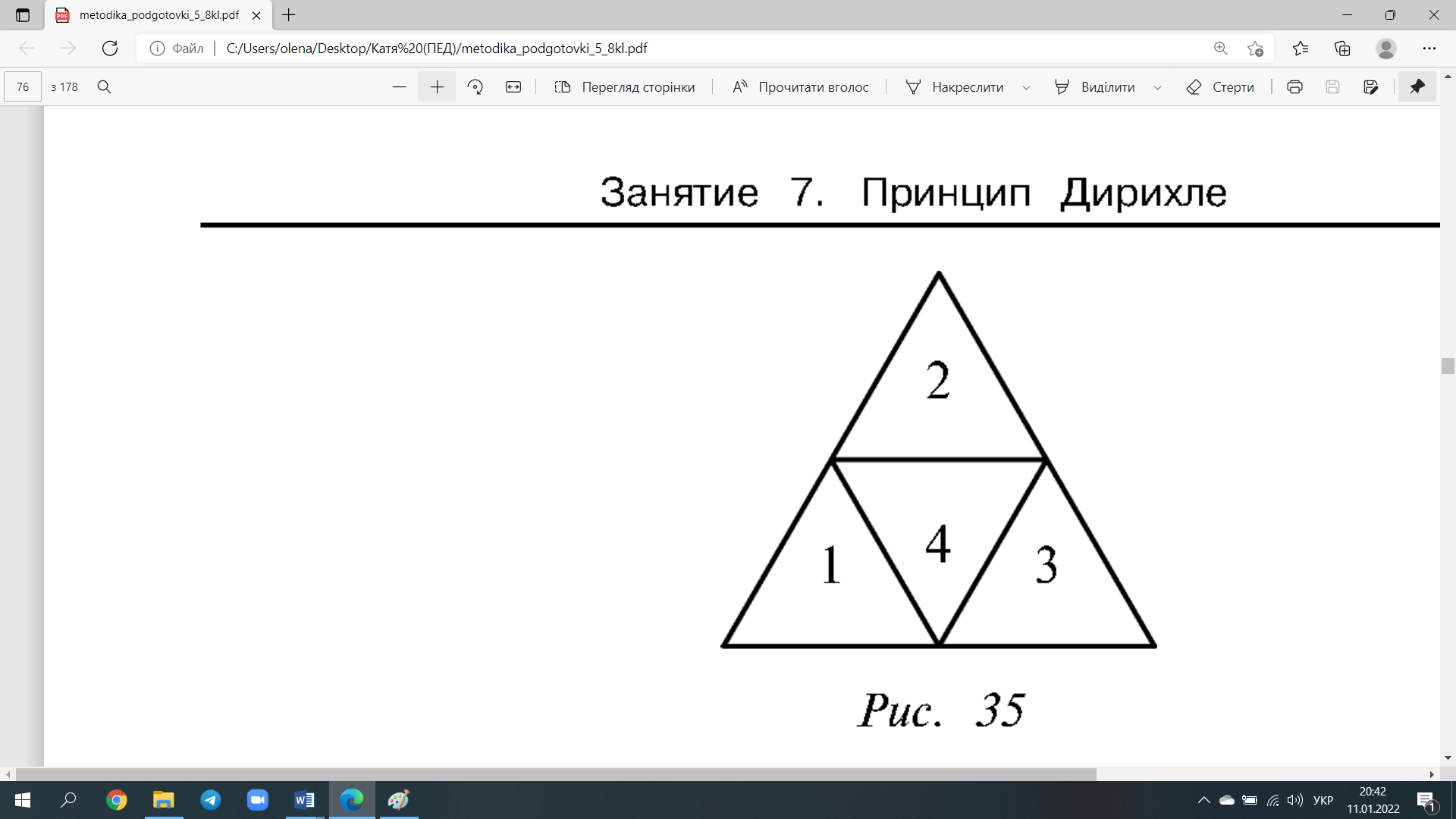
Принцип Діріхле є потужним математичним методом розв’язування завдань, причому самих різноманітних, проте не таким простим і очевидним, як може здатися на перший погляд. Вся справа, виявляється, у тому, що в кожному конкретному завданні нелегко зрозуміти, що ж тут виступає у ролі зайців, а що — у ролі кліток. І чому треба, щоб зайців було більше, ніж кліток. Вибір зайців та кліток часто не очевидний. Далеко не завжди за формулюванням завдання можна визначити, що слід застосувати принцип Діріхле. Головна ж перевага даного методу розв’язання полягає в тому, що він дає неконструктивний розв’язок (тобто ми знаємо, що такі клітки є, але де саме вони знаходяться, часто вказати не можемо); спроба ж дати конструктивне підтвердження призводить до значних труднощів. Розглянемо приклади різних завдань, які вирішуються за допомогою принципу Діріхле.

**Задача 1.** У класі 15 учнів. Доведіть, що знайдуться, як мінімум, 2 учні, які відзначають дні народження одного місяця.

***Розв’язання.*** *Нехай 15 учнів будуть «зайці». Тоді «клітками» будуть місяці року, їх 12. Так як 15 > 12, то за принципом Діріхле знайдеться, як мінімум, одна клітка, в якій сидітимуть принаймні 2 «зайця». Тобто знайдеться місяць, у якому відзначатимуть дні народження не менше 2 учнів класу. А це і потрібно було довести. Також завдання легко вирішується з використанням методу доведення від супротивного.*

**Задача 2.** Усередині рівностороннього трикутника зі стороною 1 см розташовано 5 точок. Доведіть, що відстань між деякими двома з них буде менше 0,5 см.

***Розв’язання.*** *Це найважче завдання на принцип Діріхле. Але на прикладі його розв’язання дуже добре видно всі переваги принципу. Отже, при розв’язуванні спочатку треба вибрати щось за «зайців». Оскільки за умовою завдання фігурує число 5, то нехай 5 точок будуть «зайцями». Оскільки «кліток» має бути менше, і, як правило, всього на 1, то їх має бути 4. Як отримати ці 4 «клітки»? Оскільки в умові завдання є ще 2 числа: 1 та 0,5, причому друге менше першого вдвічі, то можна отримати 4 «клітки», розбивши рівносторонній трикутник за допомогою проведення відрізків, що з’єднують середини сторін. Тоді отримаємо 4 рівносторонні трикутники зі сторонами по 0,5 см, які і будуть у нас «клітками».*



*Оскільки «зайців» маємо 5, «кліток» – 4 і 5 > 4, то за принципом Діріхле знайдеться «клітка»-трикутник зі стороною 0,5 см, в який потраплять не менше двох «зайців»-точок. А враховуючи, що всі 4 трикутники рівні і відстань між точками в будь-якому трикутнику буде меншою, ніж 0,5 см, то ми довели, що між деякими двома точками з п’яти відстань буде менше ніж 0,5 см.*

**Задача 3.** Дано 12 цілих чисел. Доведіть, що з них можна вибрати 2, різниця яких ділиться на 11 націло.

***Розв’язання.*** *Приймемо числа за «зайців». Оскільки їх 12, то «кліток» має бути менше. Нехай «клітки» - це остачі від ділення цілого числа на 11. Усього «кліток» буде 11: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10. Тоді за принципом Діріхле знайдеться «клітка», в якій будуть сидіти не менше ніж 2 «зайця», тобто знайдуться 2 цілих числа з однаковою остачею від ділення на 11. А різниця двох чисел з однаковою остачею від ділення на 11 буде ділитися націло на 11. Справді, нехай a=11m+q, b=11n+q, тоді a – b=11m+q – (11n+q)=11(m – n). A 11(m – n) ділиться на 11.*

**Задача 4.** У килимі розміром 3 × 3 м Микола зробив 8 дірок. Доведіть, що з нього можна вирізати килимок розміром 1 × 1 м, що не містить у собі дірок. (Дірки можна вважати точковими.)

У даному завданні для розв’язання необхідно застосувати інше формулювання принципу Діріхле: «Нехай в *n* клітках сидять *m* зайців, причому *n > m*. Тоді знайдеться хоча б одна порожня клітка». Подивимося, як це формулювання принципу Діріхле можна застосувати при розв’язанні даної задачі.

***Розв’язання.*** *Тут дірки будуть «зайцями». Розріжемо килим на 9 килимків розміром 1 × 1 м. Так як килимів-«кліток» 9, а дірок-«зайців» 8, то знайдеться хоча б одна «клітка», в якій не буде «зайців», тобто знайдеться килимок без дірок усередині.*

Висновок. Отже, застосовуючи цей метод, треба:

1) визначити, що зручно в задачі вважати «клітками», а що – «зайцями»;

2) одержати «клітки»; найчастіше «кліток» менше (більше), ніж «зайців», на одну (або більше);

3) вибрати для розв’язання необхідне формулювання принципу Діріхле.

**Самостійна робота**

**Задача 5.** Дано 9 цілих чисел. Доведіть, що з них можна вибрати 2, різниця яких ділиться на 8.

**Задача 6.** У класі 35 учнів. Чи можна стверджувати, що серед них знайдуться хоча б два учні, прізвища яких починаються з однієї літери?

**Задача 7.** У лісі росте мільйон ялинок. Відомо, що на кожній із них не більше 600 000 голок. Доведіть, що у лісі знайдуться дві ялинки з однаковою кількістю голок.

**Задача 8.** На дискотеку до студентського гуртожитку, в якому 42 кімнати, прийшли 36 гостей. Доведіть, що знайдеться кімната, до якої не прийшов жоден гість.

**Задача 9.** У класі 26 учнів, із них більше половини хлопчики. Доведіть, що якісь 2 хлопчики сидять за одним столом, якщо у класі 13 столів.

**Завдання-жарти**

**Задача 10.** Як одним мішком пшениці, змоловши її, наповнити два такі ж самі мішки?

**Задача 11.** Що це: дві голови, дві руки, шість ніг, а йдуть або біжать лише чотири?

**Задача 12.** Якось у свято один мій знайомий сказав мені: «Позавчора мені було 40 років, а наступного року виповниться 43 роки». Чи могло таке бути?

**Домашнє завдання**

**Задача 13.** Усередині правильного шестикутника зі стороною 1 см розташовано 7 точок. Доведіть, що відстань між деякими двома точками менше ніж 1 см.

**Задача 14.** У вершинах квадрата записано числа 3; 1; 2; 5. Дозволяється додавати до будь-яких двох чисел, що стоять у вершині квадрата, те саме ціле число. Чи можна через кілька ходів отримати в усіх вершинах однакові числа?

**Розв’язання та відповіді**

**Задача 5.** Розв’язується задача аналогічно задачі № 3. Тільки тут буде 8 остач: 0; 1; 2; ...; 7 – «клітки», а числа – їх 9 – «зайці».

**Задача 6.** Нехай 35 учнів – «зайці», а літери – це «клітки». В українській абетці 33 літери. Прізвища не можуть починатися хіба що на Ь. Тобто літер, які можуть бути першими у прізвищах, буде 32. Оскільки 35 > 32, то за принципом Діріхле знайдуться 2 учні, у яких прізвища починаються з однакової літери.

**Задача 7.** Нехай ялинки – «зайці», а число голок на ялинках: 0; 1; 2; 3; ...; 600 000 – «клітки». «Кліток» буде 600 001, а «зайців» - 1 000 000. Тут «зайців» значно більше, ніж «кліток». Тоді за принципом Діріхле в якійсь «клітці» перебуватиме не менше двох «зайців». Але якщо в одній «клітці» сидять два «зайці», то число голок у цих ялинок буде однаковим.

**Задача 8.** Нехай кімнати – «клітки», а гості – «зайці», маємо: 36 < 42. Тоді за принципом Діріхле знайдеться, як мінімум, одна порожня «клітка», тобто в якусь кімнату не прийде жоден гість.

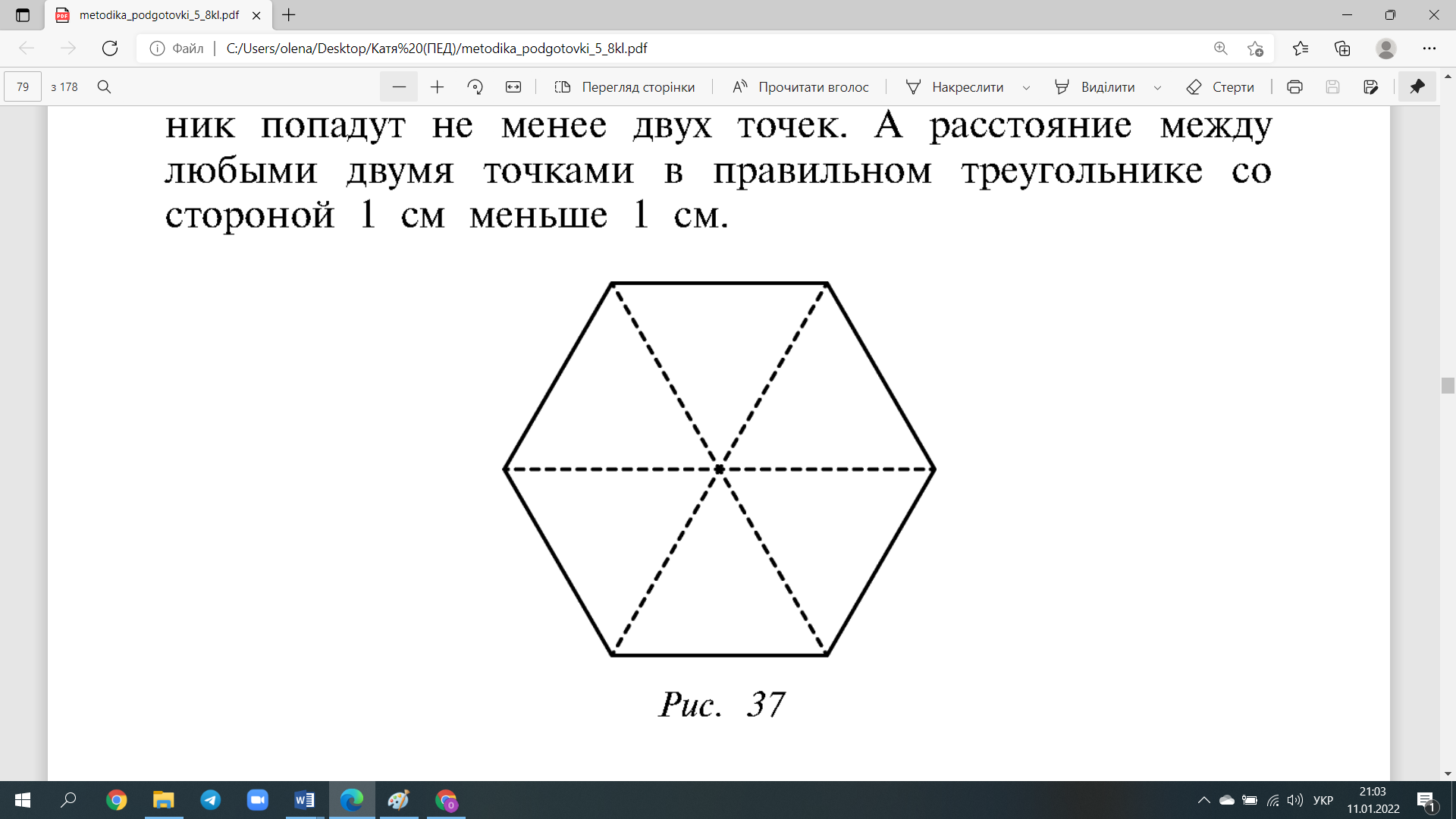
**Задача 9.** Нехай хлопчики – «зайці», а столи – «клітки». Оскільки хлопчиків більше половини, тобто більше 13 — числа столів, то за принципом Діріхле знайдеться стіл, за яким сидять не менше двох хлопчиків. А так як більше двох хлопчиків за стіл не вміщується, то це означає, що знайдеться стіл, за яким сидять 2 хлопчики.

**Задача 10.** Треба в один порожній мішок вкласти інший і висипати пшеницю.

**Задача 11.** Вершник на коні.

**Задача 12.** Так, якщо день народження 31 грудня, а розмова відбувалася 1 січня.

**Задача 13.** Приймемо 7 точок за «зайців». Побудуємо 6 «кліток». Для цього розіб’ємо правильний шестикутник на 6 правильних трикутників, як на рисунку.



Оскільки 7 > 6, то за принципом Діріхле хоча б в один трикутник потраплять не менше двох точок. А відстань між будь-якими двома точками у правильному трикутнику з стороною 1 см менше 1 см.

**Задача 14.** Сума чисел 3; 1; 2 і 5 дорівнює 11 – непарне число. Після додавання двох однакових цілих чисел нова сума буде знову непарною, у той час як сума чотирьох однакових чисел парна. Отже, скільки б не робили ходів, зробити всі числа у вершинах квадрата однаковими не можна.

***Методичний коментар.*** *Оскільки запропонована тема є для цього віку дуже складною, то пояснення всіх перших 4 завдань треба провести самому вчителю. При цьому головну увагу звернути на процес міркування та запис розв’язання. Пояснення задач № 5-9 починати після того, як деякі учні розв’яжуть їх. У задачах № 2 та № 13 для учнів 6 класів зустрінуться деякі факти, які ще не вивчалися на уроці. Тому право вчителя – брати ці завдання для заняття чи ні. При оголошенні домашнього завдання ввести поняття правильного многокутника. Завдання № 14 на повторення.*

3.3.6 Заняття з теми «Логічні завдання»

**Робота за темою**

Ввести поняття висловлювання як речення, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне. Навести приклади. Запропонувати учням назвати висловлювання. Потренуватися у побудові заперечень висловлювань, особливо зі словами «кожен», «будь-який», «хоча б один» тощо.

Після цього перейти до пояснення методів розв’язування логічних задач. Зупинитись можна поки що на двох: за допомогою застосування таблиць та за допомогою міркування. Пояснення даних методів провести на прикладі наступних завдань.

**Задача 1.** Розмовляють троє: Білов, Чернов та Рижов. Брюнет сказав Білову: «Цікаво, що один із нас білявий, інший - брюнет, а третій - рудий, але ні в кого колір волосся не відповідає прізвищу». Який колір волосся має кожен із співрозмовників?

***Розв’язання.*** *Для розв’язання задачі скористаємось таблицею 3 × 3. За умовою завдання Білов не білявий, Чернов не чорнявий і Рижов не рудий. Це дозволяє поставити знак «-» у відповідних клітинках. Крім того, за умовою Білов не брюнет, і, отже, у клітинці на перетині рядка «Білов» та стовпця «Чорний» також треба поставити знак «-».*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Колір волосся*  *Прізвище* | *Рудий* | *Чорний* | *Білявий* |
| *Білов* |  | ***-*** | ***-*** |
| *Чернов* |  | ***-*** |  |
| *Рижов* | ***-*** |  |  |

*З даних таблиці випливає, що Білов може бути тільки рудим. Поставимо знак «+» у відповідній клітинці. Звідси видно, що Чернов не рудий. Позначимо це знаком «-» у таблиці. Тепер зрозуміло, що Чернов може бути тільки білявим, а Рижов - брюнетом.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Колір волосся*  *Прізвище* | *Рудий* | *Чорний* | *Білявий* |
| *Білов* | ***+*** | ***-*** | ***-*** |
| *Чернов* | ***-*** | ***-*** | ***+*** |
| *Рижов* | ***-*** | ***+*** | ***-*** |

**Задача 2.** Дмитро, Ілля, Костя та Мишко грали у футбол. Один із них розбив м’ячем скло. На запитання «Хто це зробив?» Дмитро, Ілля та Костя відповіли: «Не я», а Мишко — «Не знаю». Потім виявилось, що двоє з них сказали правду, а двоє – неправду. Чи знає Мишко, хто розбив скло? Відповідь поясніть.

***Розв’язання.*** *Почнемо з відповідей Дмитра, Іллі та Кості. Так як скло розбив хтось один, то серед відповідей Дмитра, Іллі та Кості може бути лише одна хибна, інакше при двох помилкових відповідях виходить, що скло розбили двоє. Тоді другою помилковою відповіддю буде відповідь Мишка, тому що всього помилкових відповідей дві. Тому Мишко знав, хто розбив скло.*

**Задача 3.** На острові живуть два племені: аборигени та прибульці. Аборигени завжди кажуть правду, а прибульці завжди брешуть. Мандрівник, що приїхав на острів, найняв островитянина в провідники. Вони пішли та побачили іншого островитянина. Мандрівник послав провідника дізнатися, до якого племені належить ця людина. Провідник повернувся і сказав: «Туземець каже, що він абориген». Ким був провідник: прибульцем чи аборигеном?

***Розв’язання.*** *Оскільки відповіддю зустрічного островитянина могла бути лише фраза «Я — абориген» (ця відповідь є правдою для аборигенів і брехнею для прибульців), а провідник сказав, що туземець абориген, то провідник є аборигеном.*

**Самостійна робота**

**Задача 4.** Як перевезти в човні з одного берега річки на інший вовка, козу та капусту, якщо відомо, що вовка не можна залишити без прив’язі з козою, а коза полюбляє їсти капусту? У човні лише два місця, тому можна з собою брати одночасно або одну тварину, або капусту.

**Задача 5.** Олександр, Борис, Віктор та Григорій - друзі. Один із них лікар, інший – журналіст, третій – спортсмен, а четвертий – будівельник. Журналіст написав статті про Олександра та Григорія. Спортсмен і журналіст разом із Борисом ходили у похід. Олександр та Борис були на прийомі у лікаря. У кого яка професія?

**Задача 6.** В одному дворі живуть четверо друзів. Вадим і водій старший за Сергія; Микола і слюсар займаються боксом; електрик - молодший із друзів; вечорами Антон і токар грають у доміно проти Сергія та електрика. Визначте професію кожного із друзів.

**Задача 7.** Мачуха, вирушаючи на бал, дала Попелюшці мішок, у якому були перемішані мак і просо, і веліла перебрати їх. Коли Попелюшка виїжджала на бал, вона залишила три мішки: в одному - просо, в іншому - мак, а в третьому - ще не розібрана суміш. Щоб не переплутати мішки, Попелюшка до кожного з них приклеїла таблички: Мак, Просо, Суміш. Мачуха повернулася з балу першою і навмисне поміняла місцями таблички так, щоб на кожному мішку виявився неправильний напис. Учень феї встиг попередити Попелюшку, що тепер жоден з написів на мішках не відповідає дійсності. Тоді Попелюшка дістала лише одне-єдине зернятко з одного мішка і, подивившись на нього, одразу здогадалася, що де лежить. Як вона це зробила?

**Задача 8.**Четверо хлопців - Олексій, Борис, Володимир і Григорій - брали участь у лижних перегонах. На наступний день на питання, хто яке місце зайняв, вони відповіли так.

Олексій: я не був ні першим, ні останнім.

Борис: Я не був останнім.

Володимир: Я був першим.

Григорій: Я був останнім.

Відомо, що три з цих відповідей були правдивими, а одна – брехнею. Хто сказав правду? Хто був першим?

**Задача 9.** Корінними мешканцями острова є лицарі та брехуни. Лицарі завжди кажуть правду, а брехуни завжди брешуть. Людина *А* каже: «Я брехун». Чи є він уродженцем острова лицарів та брехунів?

**Домашнє завдання**

**Задача 10.** З чотирьох учнів – Антона, Бориса, Василя та Галі – один відмінник. Хто відмінник, якщо:

1) у трійці «Антон, Борис, Василь» є відмінник;

2) у трійці «Антон, Василь, Галя» є відмінник;

3) Антон не відмінник?

**Задача 11.** На острові два міста, в одному живуть лицарі, що говорять тільки правду, а в іншому - брехуни. Зустрілися три особи *А*, *В* і *С*.

*А* каже: «*В* – брехун».

*В* каже: «*А* і *С* з одного міста».

Хто такий *С*?

**Задача 12.** У сім’ї четверо дітей. Їм 5, 8, 13, 15 років. Дітей звуть Аня, Боря, Віра та Галя. Скільки років кожній дитині, якщо одна дівчинка ходить до дитячого садочка, Аня старша від Борі та сума років Ані та Віри ділиться на три?

**Задача 13.** Є два відра - одне місткістю 4 л, інше - 9 л. Чи можна набрати з річки рівно 6 л води?

**Розв’язання та відповіді**

**Задача 4.** Першим рейсом перевізник бере в човен козу, залишаючи на березі вовка та капусту. Другим рейсом перевізник бере із собою вовка, залишаючи на березі капусту. Переїхавши річку, перевізник залишає вовка на березі, а козу забирає в човен і повертається з нею назад. Третім рейсом перевізник бере з собою капусту, вивантаживши козу. Переїхавши річку, він залишає капусту з вовком і повертається за козою. І нарешті, у четвертому рейсі він перевозить через річку козу.

**Задача 5.** Розв’яжемо задачу за допомогою таблиці.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Олександр* | *Борис* | *Віктор* | *Григорій* |
| *Лікар* | *-* | *-* |  |  |
| *Журналіст* | *-* | *-* |  | *-* |
| *Спортсмен* |  | *-* |  |  |
| *Будівельник* |  |  |  |  |

Оскільки журналіст написав статті про Олександра і Григорія, то журналіста звали не Олександр і не Григорій. Оскільки спортсмен і журналіст ходили з Борисом у похід, то спортсмена та журналіста звали не Борисом. З того, що Олександр і Борис були у лікаря, слідує, що вони не лікарі. Поставивши відповідні мінуси в клітинах таблиці, отримуємо, що Борис — будівельник.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Олександр* | *Борис* | *Віктор* | *Григорій* |
| *Лікар* | *-* | *-* |  |  |
| *Журналіст* | *-* | *-* |  | *-* |
| *Спортсмен* |  | *-* |  |  |
| *Будівельник* | *-* | *+* | *-* | *-* |

Враховуючи це, отримуємо, що Олександр – спортсмен, Григорій – лікар, а Віктор – журналіст.

(Відповідь: Борис - будівельник, Олександр - спортсмен, Григорій – лікар, Віктор – журналіст.)

**Задача 6.** Використовуємо для розв’язання таблицю.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Вадим* | *Сергій* | *Микола* | *Антон* |
| *Шофер* | *-* | *-* |  |  |
| *Слюсар* |  |  | *-* |  |
| *Електрик* |  | *-* |  | *-* |
| *Токар* |  | *-* |  | *-* |

Оскільки Вадим і шофер старші за Сергія, то Вадим і Сергій – не шофери. Ставимо два мінуси у відповідних клітинках таблиці. Оскільки Микола та слюсар займаються боксом, то слюсар – не Микола. У відповідній клітинці ставимо мінус. Оскільки Антон і токар грають у доміно проти Сергія та електрика, то Антон та Сергій — не токарі та не електрики. Отримуємо ще чотири мінуси у клітинках таблиці. Таким чином, виходить, що Сергій може бути тільки слюсарем. Ставимо у відповідних клітинах таблиці плюс та мінуси.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *Вадим* | *Сергій* | *Микола* | *Антон* |
| *Шофер* | *-* | *-* |  |  |
| *Слюсар* | *-* | ***+*** | *-* | *-* |
| *Електрик* |  | *-* |  | *-* |
| *Токар* |  | *-* |  | *-* |

Тоді Антон – шофер. З’ясувати, хто Микола та Вадим, допоможуть висловлювання: «Вадим і шофер старший Сергія», «електрик - молодший із друзів». Значить, Вадим — не електрик, тому Вадим — токар, а Микола — електрик.

(Відповідь: Сергій - слюсар, Антон - шофер, Вадим - токар, Микола - електрик.)

**Задача 7.** Попелюшка взяла зернятко з мішка з написом «Суміш»; оскільки жодна табличка не відповідала вмісту мішка, то там був мак або просо. Якщо взяте Попелюшкою зернятко — мак, то у мішку з написом «Суміш» - мак. Тоді у мішку з написом «Мак» - просо, а в мішку з написом «Просо» - суміш. Аналогічно, якщо взяте зернятко - просо, то у мішку з написом «Суміш» - просо. Тоді в мішку з написом «Мак» - суміш, а в мішку з написом «Просо» - мак.

**Задача 8.** Припустимо, що збрехав Олексій. Тоді виходить, що він був першим або останнім. Значить, збрехали ще Володимир або Григорій. А це суперечить тому, що збрехав лише один з хлопців. Нехай збрехав Борис. Тоді він був останнім. Але Григорій також стверджував, що він був останнім. Значить, цього випадку також не може бути. Нехай збрехав Володимир. Тоді він був не першим. В цьому випадку все виходить, і першим тоді буде Борис. Останній випадок, коли збрехав Григорій, бути не може, тому що тоді останнім ніхто з хлопців не був.

(Відповідь: правду сказали Олексій, Борис, Григорій. Першим був Борис.)

**Задача 9.** Нехай *А* сказав правду, значить, він брехун. Але він не може бути брехуном, тому що брехуни завжди брешуть. Нехай *А* сказав брехню, тоді він – лицар. Але лицарі кажуть правду. Знову не виходить. Значить, *А* не може бути уродженцем острова.

**Задача 10.** Так як у трійках «Антон, Борис, Василь» та «Антон, Василь, Галя» є відмінник, то це може бути Антон або Василь. Але відомо, що Антон не відмінник, отже, відмінник - Василь.

**Задача 11.** Розглянемо два випадки.

1) Нехай *А* каже правду, тоді *В* - брехун. Так як *В* - брехун, то *В* і *С* не з одного міста, тому *С* - лицар.

2) Нехай *А* каже брехню, тоді *В* - лицар. Оскільки в такому випадку *В* говорить правду, то й *С* — лицар.

(Відповідь: *С* - лицар.)

**Задача 12.** Знайдемо спочатку вік Борі. Оскільки в дитячий садочок ходить дівчинка, то це не Боря. Тоді Борі більше 5 років. Так як Аня старша за Борю, то Борі не може бути 15 років. Оскільки сума років Ані та Віри ділиться на три, то, враховуючи вік дітей у сім’ї, це може бути у таких випадках:

1) одній дівчинці 5 років, а іншій 13 років;

2) одній дівчинці 8 років, а іншій 13 років.

В обох випадках одній дівчинці 13 років. Отже, Борі не 13 років. Маємо: Борі не 5 років, не 15 і не 13. Тоді Борі 8 років.

Встановимо тепер вік кожної дівчинки. Так як сума років Ані та Віри ділиться на три, а Борі 8 років, то можливий лише один випадок: дівчаткам 5 та 13 років. А оскільки за умовою Аня старша від Борі, то Ані 13 років. Тоді Вірі буде 5 років, а Галі – 15 років.

**Задача 13.** Так (розв’язання в таблиці).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 л | 0 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| 9 л | 0 | 9 | 5 | 5 | 1 | 1 | 0 | 9 | 6 |

***Методичний коментар.*** *Завдання № 13 – на матеріал, який буде розглядатись на наступному занятті. З розв’язання даного завдання і можна розпочати заняття з наступної теми.*

**3.3.7 Заняття з теми «Текстові задачі на переливання»**

**Робота за темою**

**Задача 1.** Використовуючи два відра місткістю 5 і 3 л, необхідно набрати із бочки 4 л води.

**Задача 2.** Використовуючи два відра місткістю 5 і 4 л, наберіть із водопровідного крана 3 л води.

**Задача 3.** Є двоє пісочних годинників: на 7 хвилин і на 11 хвилин. Каша має варитися 15 хвилин. Як зварити її, перевернувши годинники мінімальну кількість разів?

**Задача 4. Головоломка**. Недосвідчений водій автофургона намагався проїхати у двір через тунель, але неточно розрахував його висоту. В результаті машина виявилася заклиненої, та так, що не могла рушити з місця. Водій то заводив, то вимикав двигун, намагався рухатися вперед, назад — все було безрезультатно. Люди зупинялися біля машини, давали різні поради. Так тривало доти, доки поруч не зупинився легковий автомобіль, з якого вийшов водій і щось тихо сказав малодосвідченому колезі. Винуватець безладу гаряче подякував за пораду і швидко виконав нескладну роботу. Потім без жодних перешкод проїхав у двір. Яку дію виконав недосвідчений водій?

**Завдання на повторення**

**Задача 5.** Розв’яжіть ребус:

ПОРТ

+ПОРТ

ПОРТ

ТОРГ

**Задача 6.** Коник стрибав уздовж прямої і повернувся у початкову точку (довжина стрибка 1 м). Доведіть, що він зробив парне число стрибків.

**Задача 7.** Чи правда, що з будь-яких трьох цілих чисел можна вибрати два, сума яких парна?

**Самостійна робота**

**Задача 8.** Використовуючи 9-літрове відро і 4-літровий бідон, наберіть із ставка 7 л води.

**Задача 9.** Використовуючи 2 відра місткістю 9 і 11 л, наберіть із ставка 4 л води.

**Домашнє завдання**

**Задача 10.** З повного 8-літрового відра відлийте 4 л за допомогою порожніх трилітрової банки та 5-літрового бідона. Воду виливати на землю не можна, іншими судинами, окрім цих трьох, не можна користуватися.

**Задача 11.** Вовк і вовченя, ведмідь і ведмежа, лис і лисеня вирішили переправитися з лівого берега річки на правий. У них був човен, в який вміщувалися будь-які двоє. Як їм переправитися на інший берег, якщо не можна залишати дитинчат із чужими татами без свого тата?

**Розв’язання та відповіді**

**Задача 1.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 л | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 |
| 5 л | 0 | 5 | 2 | 2 | 0 | 5 | 4 |

**Задача 2.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 л | 0 | 4 | 0 | 4 | 3 |
| 5 л | 0 | 0 | 4 | 4 | 5 |

**Задача 3.** 15 = (11 - 7) +11. Одночасно перевернемо годинники, через 7 хвилин починаємо варити кашу. Після 4 хвилин (пісок у годиннику на 11 хвилин закінчиться) знову перевернемо годинник на 11 хвилин.

**Задача 4.** Водій трошки випустив повітря з коліс.

**Задача 5.** 2497+2497+2497=7491.

**Задача 6.** Оскільки після кожного стрибка відстань змінюється з непарного значення на парне, причому відстань буде парною після парного числа стрибків, то на початок коник-стрибунець повинен повернутися після парного числа стрибків.

**Задача 7.** Нехай 3 числа — «зайці», а «клітки» — множина парних чисел і множина непарних чисел. «Кліток» 2. Так як 3 > 2, то за принципом Діріхле знайдуться принаймні 2 числа однакової парності: обидва парні або обидва непарні. А сума таких чисел – число парне.

**Задача 8.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 л | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 40 | 3 | 3 | 0 | 4 | 0 |
| 9 л | 0 | 0 | 4 | 4 | 8 | 8 | 9 | 0 | 3 | 3 | 7 |

**Задача 9.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9 л | 0 | 0 | 9 | 0 | 2 | 2 | 9 |
| 11 л | 0 | 11 | 2 | 2 | 0 | 11 | 4 |

**Задача 10.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Відро, 8 л | 8 | 3 | 3 | 6 | 6 | 1 | 1 |
| Бідон, 5 л | \_ | 5 | 2 | 2 | \_ | 5 | 4 |
| Банка, 3 л | \_ | \_ | 3 | \_ | 2 | 2 | 3 |

**Задача 11.** Відповідь у таблиці

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *ПБ* | *ВвМм*  *Лл* | *МмЛл* | *МмЛл* | *вмл* | *вмл* | *вм* | *вм* | *л* | *л* | *\_* | *\_* |
| *Човен* | *\_* | *Вв* | *в* | *МЛ* | *Л* | *Лл* | *л* | *вм* | *в* | *вл* | *\_* |
| *ЛБ* | *\_* | *\_* | *В* | *В* | *ВМ* | *ВМ* | *ВМЛ* | *ВМЛ* | *ВМмЛ* | *ВМмЛ* | *ВвМмЛл* |

(тут ПБ - правий берег, ЛБ - лівий берег, В - вовк, в - вовченя, М - ведмідь, м - ведмежа, Л - лис, л - лисеня).

***Методичний коментар.*** *Для задач на переливання краще починати розв’язання з кінця: як отримати шукану кількість рідини.*

*Докладно розібрати треба задачу, запропоновану додому, та задачі № 1 і № 2. Для задачі № 1 міркування можуть бути такими. Так як нам треба отримати 4 л, то дивимося, за допомогою яких дій можемо отримати число 4, а саме: 4=5 - 1=2 + 2 = 3 +1. Відро на 5 л маємо. Як отримати 1 л? 1 = 3 - 2. Відро на 3 л у нас є. Залишилось одержати 2 л. Але 2 = 5 - 3, і розв’язання задачі отримали.*

*Також необхідно зазначити, що завдання на переливання розв’язують декількома способами, треба розбирати той, який дозволяє найшвидше отримати необхідну кількість рідини.*

3.3.8 Заняття з теми «Зважування»

**Робота за темою**

**Задача 1.** Є чашкові ваги без гирь і дві монети, одна з яких фальшива, причому легша за іншу. Потрібно виявити фальшиву монету.

**Задача 2.** Є чашкові ваги без гирь і три монети, одна з яких фальшива, причому легша від інших. Потрібно виявити фальшиву монету.

**Задача 3.** Є чотири однакові за видом монети, одна з яких фальшива, легша за інші. Потрібно визначити фальшиву монету. Яке мінімальне число зважувань потрібно?

**Задача 4.** Є п’ять однакових на вигляд монет, одна з яких фальшива, легша за інші. Потрібно визначити фальшиву монету. Яке мінімальне число зважувань потрібно?

**Задача 5.** Є шість однакових на вигляд монет, одна з яких фальшива, легша за інші. Потрібно визначити фальшиву монету. Яке мінімальне число зважувань потрібно?

**Задача 6.** Є сім однакових на вигляд монет, одна з яких фальшива, легша за інші. Потрібно визначити фальшиву монету. Яке мінімальне число зважувань потрібно?

**Задача 7.** Є вісім однакових на вигляд монет, одна з яких фальшива, легша за інші. Потрібно визначити фальшиву монету. Яке мінімальне число зважувань потрібно?

**Задача 8.** Є дев’ять однакових на вигляд монет, одна з яких фальшива, легша за інші. Потрібно визначити фальшиву монету. Яке мінімальне число зважувань потрібно?

**Задача 9.** З 27 монет одна фальшива, вона легша за решту. Чи можна знайти її за 3 зважування?

**Задача 10.** З чотирьох зовні однакових монет дві важать по 10 г, а дві інші - по 9 г. Є чашкові ваги зі стрілкою, що показує різницю мас вантажів, покладених на чашки. Як за одне зважування знайти хоча б одну десятиграмову монету?

**Задача 11.** Яку масу повинна мати кожна з трьох гирь для того, щоб за їх допомогою можна було б зважити будь-яке ціле число кілограмів від 1 до 10 на чашкових вагах (гирі можна ставити на обидві чашки)? Обґрунтуйте свою відповідь.

**Домашнє завдання**

**Задача 12.** У 4 мішках всі монети справжні (важать по 10 г), а в одному мішку всі фальшиві (важать по 11 г). Одним зважуванням на точних терезах зі стрілкою визначте, в якому мішку фальшива монета.

**Задача 13.** У готелі зупинився купець. У нього для розрахунку за проживання був лише один срібний ланцюжок, що складається з 7 ланок. За кожен день перебування у готелі він розплачувався однією ланкою ланцюжка. Яку ланку ланцюжка треба розпиляти, щоб прожити у готелі 7 днів і щодня розплачуватися з господарем? (Господар міг давати здачу ланками, отриманими раніше.)

**Задача 14.** Який кут утворюють годинникова та хвилинна стрілки о 15 год 30 хв?

**Розв’язання та відповіді**

**Задача 1.** Покласти по одній монеті на кожну чашку терезів. Фальшива монета на тій, що вгорі.

**Задача 2.** Покласти 2 монети на чашки терезів, якщо вони у рівновазі, то фальшива – та, що залишилася; якщо не у рівновазі, то фальшива – на верхній чашці терезів.

**Задача 3.** Ділимо монети на дві купки по дві монети, кладемо їх на ваги. Та купка, яка буде легша, містить фальшиву монету Здійснивши друге зважування, визначаємо фальшиву монету. Можна зважувати по одній монеті. Якщо у двох монет рівновага, серед них фальшивої монети немає. Тоді зважуємо дві монети, що залишилися, і визначаємо фальшиву. Якщо при першому зважуванні не вийшло рівноваги, то відразу визначаємо фальшиву монету.

Отже, мінімальна кількість зважувань - 2 (хоча, якщо пощастить, то можна визначити фальшиву монету і за одне зважування).

**Задача 4.** Зважуємо по 2 монети. Якщо ваги в рівновазі, то монета, що залишилася, фальшива. Якщо ваги не у рівновазі, то в тій парі, яка легша, визначаємо фальшиву монету. Отже, потрібні два зважування.

**Задача 5.** Зважуємо по 3 монети. Вибираємо легшу купку. Далі робимо так, як у задачі № 2. Усього достатньо 2 зважувань.

**Задача 6.** Можна відкласти убік одну з монет і зважити по 3 монети. Якщо ваги в рівновазі, то фальшива монета — серед тих, що залишилися; якщо не в рівновазі, то, визначивши легшу купку, беремо з неї 2 монети і зважуємо їх. Якщо ваги знову в рівновазі, то монета, що залишилася, фальшива. Якщо ваги не у рівновазі, то на чашці, яка підніметься нагору, буде фальшива монета. Можна зробити інакше. Ділимо 7 монет на 2 купки: по 4 і 3 монети. На початку працюємо з чотирма монетами: зважуємо дві та дві монети. Якщо ваги врівноважилися, то фальшива серед 3 монет, що залишилися. Її визначаємо способом, описаним у задачі № 2. Якщо ваги не в рівновазі, то фальшива монета на чашці терезів, яка піднялася вгору. Визначаємо її наступним зважуванням. Отже, знадобилося лише два зважування.

**Задача 7.** Розділимо монети на купки по 4 монети або на купки по 2, 3 та 3 монети.

1-й спосіб. При першому зважуванні визначаємо легшу купку з 4 монет, потім чинимо так, як у задачі № 3 (всього 3 зважування).

2-й спосіб. Спочатку зважуємо по 3 монети. Якщо ваги врівноважилися, то фальшива монета серед двох, що залишилися. Її визначаємо другим зважуванням. Якщо ваги не врівноважилися, то фальшива монета серед трьох монет, що знаходяться на чашці ваг, яка піднялася вгору. Її визначаємо другим зважуванням (завдання №2). Виходить, можна визначити фальшиву монету за 2 зважування.

**Задача 8.** Розділимо монети на купки по 3 монети та першим зважуванням визначимо купку з фальшивою монетою. Потім другим зважуванням визначаємо серед цих трьох монет фальшиву.

**Задача 9.** Розділимо монети на купки по 9 монет та першим зважуванням визначимо купку, в якій фальшива монета. Потім аналогічно розділимо 9 монет на три купки і другим зважуванням визначимо купку з 3 монет, у якій перебуватиме фальшива монета. Третім зважуванням визначимо із цих трьох монет фальшиву.

**Задача 10.** Покладемо на ліву чашку терезів дві монети, а на праву – одну. Можливі чотири випадки, показані у таблиці.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ліворуч | Праворуч | Монета, що залишилася | Покази стрілки |
| 10+10 | 9 | 9 | 11 |
| 10+9 | 9 | 10 | 10 |
| 10+9 | 10 | 9 | 9 |
| 9+9 | 10 | 10 | 8 |

Таким чином, за показами стрілки ми можемо однозначно визначити, з яким із чотирьох можливих випадків ми маємо справу. Залишилося зауважити, що у кожному з цих випадків потрібна монета легко знаходиться (підкреслено у таблиці).

**Задача 11.** Наприклад, гирі масою 1, 3 та 6 кг. Дійсно:

10 = 6 + 3 + 1; 9 = 6 + 3; 8 = 6 + 3 – 1; 7 = 6 +1;

6 = 6; 5 = 6 – 1; 4 = 3 + 1; 3 = 3; 2 = 3 – 1; 1 = 1.

Є й інший розв’язок: 1, 2 та 7 кг.

10 = 7 + 2 + 1; 9 = 7 + 2; 8 = 7 + 1; 7 = 7; 6 = 7 – 1;

5 = 7 – 2; 4 = 7 – 1 – 2; 3 = 2 + 1; 2 = 2; 1 = 1.

**Задача 12.** Пронумеруємо мішки числами від 1 до 5. Візьмемо з кожного мішка кількість монет, що дорівнює його номеру. Якщо всі монети справжні, то вони б важили 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150(г). Але оскільки в одному мішку монети фальшиві, значить, маса відрізнятиметься на стільки грамів, скільки монет взяли з даного мішка, а значить, номер мішка збігається з різницею в масі монет. Тобто номер мішка з фальшивими монетами співпадатиме з останньою цифрою маси монет. Наприклад, якщо вийшло 152 г, то фальшиві монети будуть у 2-му мішку.

**Задача 13.** Від’єднати третю ланку. Тоді ланцюжок розпадеться на три частини: 1 ланка, 2 ланки і 4 ланки. Першого дня купець віддасть 1 ланку, другого дня - 2 ланки (назад отримає 1 ланку), третього дня віддасть знову 1 ланку, четвертого дня віддасть 4 ланки (назад отримає 1 ланку і 2 ланки), у п’ятий віддасть 1 ланку, у шостій віддасть 2 ланки (назад отримає 1 ланку), сьомого дня віддасть 1 ланку.

**Задача 14.** О 15:00 стрілки утворювали прямий кут. За 30 хв хвилинна стрілка повернулася на 180°, а годинна — на 15°. Тоді кут між ними буде рівний 180° – 90° – 15° = 75°.

***Методичний коментар.*** *Перші 8 завдань було запропоновано з метою діагностики математичних здібностей учнів. Завдання пропонувалися всі однотипні, але збільшувалася кількість монет. У завданнях № 9-12 вже розглядалися інші випадки.*

ВИСНОВКИ

Аналіз розвитку математичних олімпіад та конкурсів показав, що в нашій країні є значний інтерес та потенціал для участі школярів у різноманітних математичних змаганнях. Водночас останніми роками спостерігаються тенденції до нівелювання важливості математичних олімпіад для учнів звичайних (не спеціалізованих) шкіл як серед учнів і вчителів, так і на рівні держави. Але одночасно з цим значна частина педагогів усвідомлює неймовірну важливість математичної освіти для майбутнього суспільства.

У сучасній школі необхідно спрямовувати роботу на більш раннє виявлення та особливе навчання математично обдарованих дітей. Диференційоване навчання математиці доцільно починати якомога раніше, принаймні вже у 5 класі, коли у школярів вже починає активно формуватися абстрактне та логічне мислення, а великий інтерес до вивчення математики ще не придушений складними і часто нецікавими для сучасних дітей завданнями 7-8 класів. У процесі навчання потрібно використовувати доступні учням олімпіадні та конкурсні задачі, заохочувати їх брати участь у різноманітних конкурсах, в тому числі й онлайн.

Для вдосконалення підготовки обдарованих учнів до математичних змагань учителям варто, на нашу думку, враховувати наступні рекомендації:

* проведення попередньої психологічної діагностики щодо виявлення обдарованості з математики;
* посилення теоретичної підготовки обдарованих дітей;
* при підготовці особливу увагу слід приділяти геометричним нестандартним завданням, способу доведення від супротивного та змішаним завданням (комбінаторика та теорія чисел та ін.);
* посилити вивчення позапрограмового матеріалу: теорія чисел, задачі на стратегії та логічні завдання з шахами;
* розвивати мислення обдарованих дітей у напрямі культури алгоритмізації та просторового мислення, тому що такий тип мислення часто не характерний для обдарованих дітей;
* формувати навички дослідження, використовувати схильність обдарованих учнів до самонавчання.

Розроблена програма математичного гуртка для учнів 5-6 класів враховує названі рекомендації та може бути використана вчителями для вдосконалення підготовки учнів цього віку до олімпіад та конкурсів з математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. International Mathematical Olympiad. URL: https://www.imo-official.org/year\_country\_r.aspx?year=2021&amp;column=total&amp;order=desc
2. Аракелян Д., Аракелян К. Увлекательные задачи по математике. СПб : БХВ-Петербург, 2021. 176 с.
3. Баран О. І., Васильєва Л. Я. Задачі для олімпіад, конкурсів, змагань. Математика. 6 – 11 класи. Харків : Основа, 2018. 240 с.
4. Басанько А. М., Романенко А. О. За лаштунками підручника з математики : зб. розвивал. задач для учнів 5-7 кл. Київ : Генеза, 2017. 160 с.
5. Беседін Б. Б., Кадубовський О. А. Олімпіадні задачі: розв’язання задач ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2019: навч. посіб. Слов’янськ : вид. центр «Маторін», 2020. 88 с.
6. Дрогобицький педагогічний університет ім. І. Франка. URL: https://dspu.edu.ua/hsci/wp-content/uploads/2017/12/008-49.pdf
7. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи / под ред. В.О. Бугаенко. 11-е изд., стереотипное. М. : МЦНМО, 2018. 96 с.
8. Конет І. М., Радченко В. М., Теплінський Ю. В. Обласні олімпіади з математики: навч. посіб. / за ред. Конет І. М. Кам’янець-Подільський : Абетка, 2010. 388 с.
9. Крулик Стивен, Позаментье Альфред. Стратегии решения математических задач. Различные подходы к типовым задачам. Москва : Альпина Паблишер, 2018. 224 с.
10. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / под ред. Н. И. Чуприковой. М. : Издательство «Институт практической психологии»; Воронеж : Издательство НПО «МОДЭК», 1998. 416 с.
11. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: навч.-метод. посіб. Львів : Каменяр, 2008. 348 с.
12. Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру – 2011». Інформаційний вісник. Львів : Каменяр, 2019. 54 с.
13. Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру – 2012». Інформаційний вісник. Львів : Каменяр, 2012. 54 с.
14. Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру – 2019». Інформаційний вісник. Львів : Каменяр, 2019. 54 с.
15. Павлюк О. Українські школярі посіли шосте місце на Міжнародній математичній олімпіаді. У ній брали участь 107 країн | Громадське телебачення. Громадське телебачення - Останні новини дня, всі надзвичайні новини в Україні | Громадське телебачення. URL: https://hromadske.ua/posts/ukrayinski-shkolyari-posili-shoste-misce-na-mizhnarodnij-matematichnij-olimpiadi-u-nij-brali-uchast-107-krayin
16. Петраков И. С. Математические олимпиады школьников: Пос. для учителей. М. : Просвещение, 1982. 96 с.
17. Строгац Стівен. Екскурсія математикою. Як через готелі, риб, камінці і пасажирів зрозуміти цю науку / пер. з англ. А. Дудченко. 2-ге вид. Київ : Наш Формат, 2020. 256 с.
18. Учасники проектів Вікімедіа. Міжнародна математична олімпіада – Вікіпедія. URL: https://uk.m.wikipedia.org/wiki/Міжнародна\_математична\_олімпіада
19. Фарков А. В. Математические олимпиады: методика подготовки: 5 – 8 классы. М. : ВАКО, 2012. 176 с.
20. Филипповский Г. Б. Школьная геометрия в миниатюрах. Бостон-Киев : Толиман, 2016. 240 с.
21. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012. 208 с.