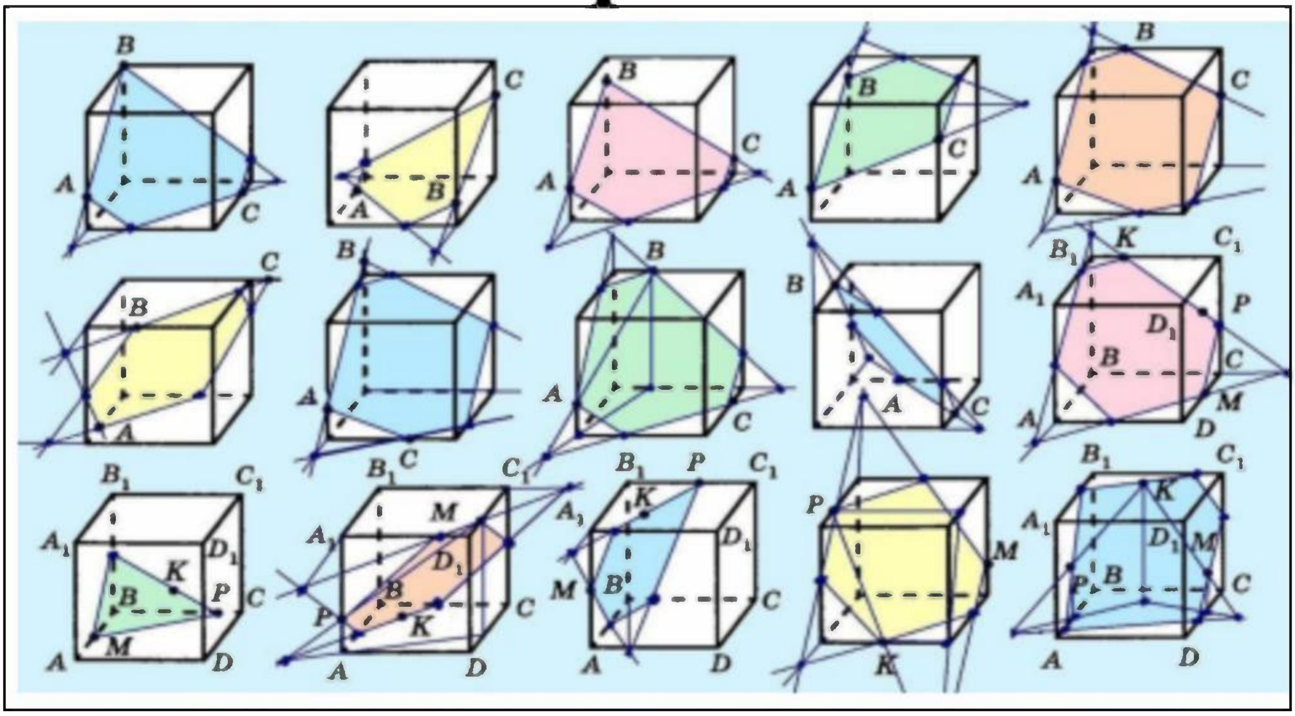
ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ
ПОЛТАВСЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ

Ліцей №32 «Європейський» Полтавської міської ради

Мірошниченко Н.І.

Побудова перерізів многогранників



Полтава 2022

Мірошниченко Н.І. Побудова перерізів многогранників. Полтава, 2022, 47с.

Мірошніченко Надія Іванівна,
вчитель математики, спеціаліст вищої категорії ліцею №32 «Європейський» м. Полтава

Рецензенти:

Флегантов Леонід Олексійович, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін, професор кафедри інформаційних систем та технологій Полтавського державного аграрного університету, кандидат фізико математичних наук, доцент.

Семененко Наталія Миколаївна, голова методоб'єднання вчителів математики, вчитель методист ліцею №32 «Європейський» м. Полтави.

Навчальний посібник присвячений одній з важливих та складних тем шкільного курсу геометрії.

У посібнику систематизовано основні методи побудови плоских перерізів: метод слідів, метод внутрішнього проектування, метод поділу на трикутні многогранники, метод доповнення до трикутного многогранника, метод паралельних прямих.

Посібник містить ціннісний навчально-методичний матеріал.

Рекомендований для вчителів, учнів, здобувачів вищої освіти фізико-математичних факультетів закладів вищої освіти педагогічного направлення.

Зміст

ВСТУП

Даний посібник присвячений важливій темі елементарної шкільної геометрії – розв'язуванню геометричних задач на побудову перерізів многогранників площиною. Метою даної роботи було: систематизувати основні методи побудови плоских перерізів многогранників, проілюструвавши їх прикладами.

Для початку рекомендую звернути увагу на перелік основних умовних позначень, представлених наприкінці цього тексту. Вони постійно використовуються у посібнику для описання геометричних побудов при розв'язуванні задач. В окремих випадках, як і для інших типів геометричних задач, окрім дослідження в ході розв'язування самої задачі, доцільно буває також дослідити одержаний розв'язок, довести його істинність. Тут умовні позначення теж стануть у нагоді, оскільки, вони дозволяють описувати послідовність кроків розв'язування задач або записувати доведення, використовуючи математичну символіку. В усіх випадках, використовуючи прийняті умовні позначення, можна на власний розсуд використовувати як формальне описання виконаних дій, коли кожен наш наступний крок буде логічним наслідком певних формальних співвідношень між геометричними об'єктами, їх перетворенням за чітко визначеними правилами при повному абстрагуванні від змісту цих співвідношень і правил їх перетворення, так і змістовне (неформальне), що також має місце у шкільній математиці, коли використовуються і математичні символи і вислови природної мови. Обидва ці способи використовуються у даному посібнику.

На початку представлені основні теоретичні відомості щодо побудови плоских перерізів многогранників, які далі у посібнику використовуються для розв'язування конкретних задач.

Кожен з п’яти методів побудови, представлених у даному посібнику (метод слідів, метод відповідності (внутрішнього проєктування), метод поділу на трикутні многогранники, метод доповнення до трикутного многогранника, метод паралельних прямих), являє собою алгоритм, що складається з трьох або чотирьох пунктів.

Який із цих методів обрати вчителю при даній кількості відведених для вивчення теми годин? У переважній більшості існуючих посібників розглядають метод слідів, метод внутрішнього проєктування (метод відповідності) та комбінований метод, який поєднує обидва вказаних. Розв’язуючи задачу, значно простіше виконувати побудову прямої, провівши її через дві задані точки, ніж побудову прямої паралельної до заданої. Тому інші способи побудови перерізів, розглянуті у посібнику є дещо складнішими. А метод поділу n-кутної призми (піраміди) на трикутні майже не відрізняється по-суті від методу відповідності.

Умовні позначення

$A, B, C, \ldots$	– точки $A, B, C, \ldots$
$(AB), (AC), \ldots, a, b, \ldots$	– прямі $AB, AC, \ldots, a, b, \ldots$
$[AB], \ldots$	– відрізок $AB, \ldots$
$[AB), \ldots$	– промінь $AB, \ldots$
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, (ABC), \ldots$	– площини $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, ABC, \ldots$
$(AB) \cap (CD) = K$	– пряма AB перетинає пряму CD в точці K
$K \in (AB)$	– точка K належить прямій AB
$\alpha \parallel (ABC)$	– площина α паралельна площині ABC
$\angle ABC$	– кут ABC, величина кута ABC

Основні поняття

При побудові плоских перерізів многогранників використовують такі основні поняття, як-от: січна площина многогранника, плоский переріз многогранника.

Січна площина многогранника *– це площина, по обидві сторони від якої розміщені точки даного* многогранника.

Переріз многогранника *– многокутник, сторонами якого є відрізки, по яких січна площина перетинає грані даного многогранника.* Переріз многогранника належить січній площині многогранника.

У залежності від виду многогранника та взаємного розміщення многогранника й січної площини, переріз многогранника може бути трикутником, чотирикутником, п'ятикутником і т.д. Зауважимо, що мінімальна кількість сторін многокутника перерізу рівна трьом, а максимальна – не може перевищувати кількості усіх граней даного многогранника. Наприклад, плоский переріз чотирикутної піраміди може мати форму трикутника, чотирикутника або п'ятикутника (рис.1).

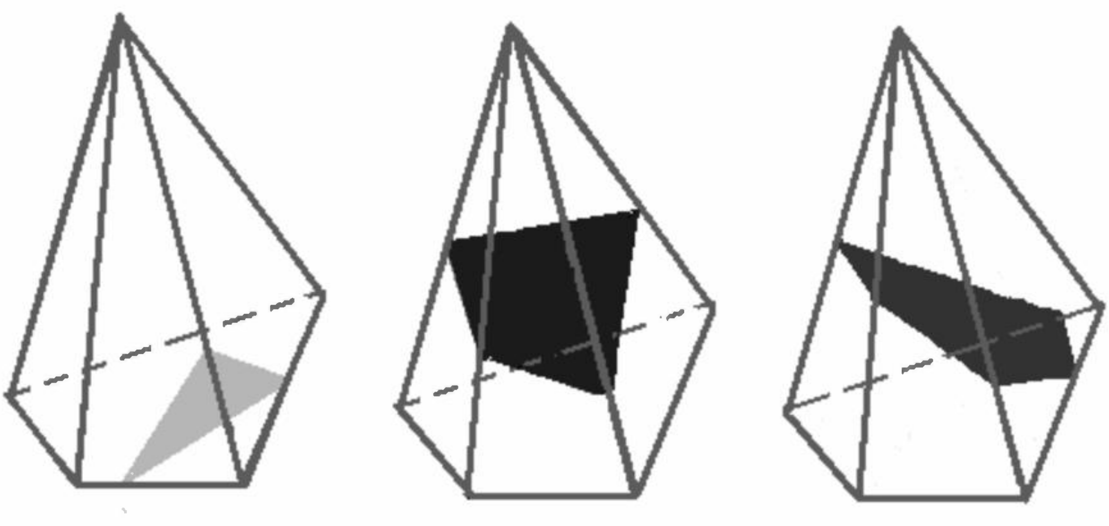


Рис. 1.

У загальному випадку, перерізи многогранників можуть бути різного виду. Наприклад, трикутний переріз може бути правильним, рівнобедреним або різностороннім трикутником. Однак, вид перерізу не можна визначити за зображенням побудови, оскільки, величини кутів і сторін трикутника не завжди зберігаються при паралельному проєктуванні. Одержане у такий спосіб зображення є *необоротним*. Такі зображення також називають умовними; вони потребують додаткових пояснень.

Вважається, що при побудові зображень просторових тіл слід чітко відрізняти оригінал та його зображення у паралельній проєкції. Зокрема, вони мають по-різному позначатись, і на кожному кроці побудови потрібно вживати відповідну термінологію, наприклад, говорити не «сторона», «бісектриса», «кут», а «зображення сторони», «проєкція бісектриси», «зображення кута» тощо. Однак, при побудові перерізів многогранників, зазвичай, мова ведеться все ж таки не про зображення геометричних фігур та їх елементів, а про самі фігури, про те, як будується або розміщується в просторі той чи інший елемент оригіналу. Наприклад, коли говоримо: «Проведемо через точку О пряму, перпендикулярну до прямої АВ», то маємо на увазі перпендикуляр до прямої АВ у просторовій моделі фігури, незалежно від того, як пряма АВ і перпендикуляр до неї будуть зображені на малюнку. В цьому випадку креслення розглядається як ілюстрація, що допомагає встановити особливості просторового тіла, про яке йдеться у задачі. Так само, міркування у письмових поясненнях, будуть стосуватись самого тіла, а не його зображення.

При розв'язуванні задач на побудову плоских перерізів многогранників, має сенс дотримуватись правил, які використовують у кресленні, послуговуватись відповідною термінологією, розуміючи її зміст. Розглянемо деякі основні терміни.

Аксонометрією (аксонометричною проєкцією) просторового тіла (предмета) називається його паралельна проєкція на площину, побудована разом з проєкцією прямокутних координатних осей, в системі яких розміщено зображуваний предмет.

Основні *властивості аксонометрії*:

1. Аксонометричною проєкцією відрізка є відрізок.
2. Аксонометричні проєкції просторових паралельних прямих теж паралельні.
3. Якщо лінії у просторі перетинаються, то аксонометричні проєкції цих ліній теж перетинаються; точка перетину аксонометричних проєкцій є аксонометричною проєкцією точки перетину самих ліній у просторі.
4. Аксонометричні проєкції відрізків однієї прямої пропорційні відповідним відрізкам у просторі.
5. Якщо пряма в просторі дотикається до будь-якої лінії в точці А, то аксонометрична проєкція цієї прямої буде дотикатися до аксонометричної проєкції відповідної лінії у точці, що є аксонометричною проєкцією точки А.
6. Лінії й кути, що лежать у площині, паралельній площині аксонометричної проєкції, проєктуються на цю площину без зміни.
7. Аксонометричною проєкцією кола в загальному випадку є еліпс. Якщо площина кола паралельна аксонометричній площині, то аксонометричною проєкцією кола є коло; якщо площина кола паралельна напряму проєктування (перпендикулярна аксонометричній площині), то аксонометричною проєкцією кола є відрізок, рівний діаметру кола.

Аксонометричні проєкції розрізняють залежно від напряму проєктування й коефіцієнтів зміни розмірів по координатних осях. Якщо напрям проєктування перпендикулярний до аксонометричної площини, це *прямокутна аксонометрія*. Якщо напрям проєктування не перпендикулярний до аксонометричної площини, то це *косокутна аксонометрія*.

Коефіцієнти зміни розмірів показують, в якому відношенні змінюються довжини відрізків, паралельних координатним осям при проєктуванні їх на аксонометричну площину. Залежно від цих коефіцієнтів як прямокутні, так і косокутні аксонометричні проєкції діляться на *ізометричні, диметричні і триметричні.*

Ізометричні проєкції мають по всіх трьох осях однакові коефіцієнти зміни. Диметричні проєкції мають однакові коефіцієнти зміни на двох осях. Триметричні проєкції по всіх трьох осях мають різні коефіцієнти зміни (загальний випадок аксонометрії). На практиці, рекомендується застосовувати такі аксонометричні проєкції: прямокутні ізометричні, прямокутні диметричні, косокутні диметричні (фронтальні).

У технічному кресленні та нарисній геометрії побудова зображення куба, паралелепіпеда, прямої чотирикутної призми зазвичай виконується у косокутній фронтальній диметричній проєкції, для якої $\angle xOz = 90°$, а $\angle yOz$ може приймати значення $120°, 135°, 150°$.

Якщо $\angle xOz = 90°$, $\angle xOy = \angle yOz = 135°$, коефіцієнт зміни лінійних розмірів оригіналу по вісях Ox і Oz рівний 1, а по вісі Oy становить $\frac{1}{2}$, таку аксонометрію називають *фронтальною симетрією або кабінетною проєкцією*.

Загалом, рисунок має бути виконаний у такій проєкції, що дає найбільш повне і правильне уявлення про просторове тіло. Видимі лінії слід креслити суцільними, невидимі – штриховими. Переріз, про який ідеться в задачі, заштриховують. Від вибору проєкції для побудови зображення многогранника залежить, наскільки наочною буде побудова його плоского перерізу.

Загальні вимоги щодо виконання побудов

Як було сказано вище, зображення, отримане при довільному паралельному проєктуванні, не дозволяє точно відновити оригінал. Але при розв'язуванні задач шкільного курсу геометрії цього й не вимагається. До креслень (зображень), що виконуються при розв'язуванні задач на побудову перерізів многогранників на уроках геометрії у закладах середньої освіти, ставляться такі вимоги:

1. Зображення повинно легко виконуватись, тобто правила побудови повинні бути максимально простими.
2. Зображення повинно бути наочним, викликати просторове уявлення про форму та властивості оригіналу.
3. Зображення повинно бути правильним, тобто повинно являти собою фігуру, подібну паралельній проєкції оригіналу.

З поняттям правильного зображення пов'язано поняття його метричної визначеності. Зображення фігури називається *метрично визначеним*, якщо воно дозволяє (в принципі) відновити фігуру-оригінал з точністю до подібності.

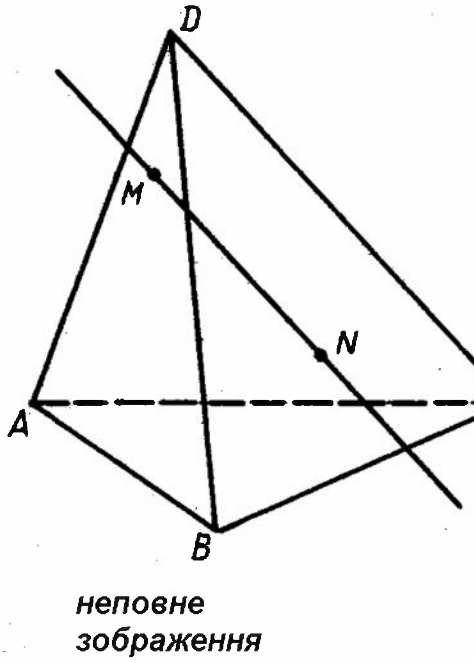
При побудові плоских перерізів можливі такі *способи задання січної площини*:

- трьома точками, що не лежать на одній прямій;
- прямою і точкою, що їй не належить;
- двома паралельними прямими;
- двома прямими, що перетинаються.

Враховуючи, що через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну (основна властивість належності точок і прямих площині), а також те, що через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній (властивість паралельних прямих), задача побудови січної площини у будь-якому випадку зводиться до побудови площини, заданої трьома точками, що не лежать на одній прямій.

У загальному випадку січна площина має спільну пряму з площиною кожної грані даного многогранника. *Пряму, по якій січна площина перетинає площину грані многогранника, називають* ***слідом*** *січної площини на цій грані.*

Повнота зображення. При побудові перерізів для відшукання слідів січної площини на гранях многогранника, крім задання точок, які визначають січну площину, необхідно вказати (задати або знайти) проєкції цих точок на площину грані, на якій шукається слід. Тоді *всі вершини многогранника й задані точки перерізу будуть заданими, тобто дане зображення буде* ***повним.*** Для цього, при побудові перерізу призми для зображення проєкцій точок використовується їх проєктування паралельно ребрам призми, а при побудові перерізу піраміди – центральне проєктування з центром у вершині піраміди (рис. 2).



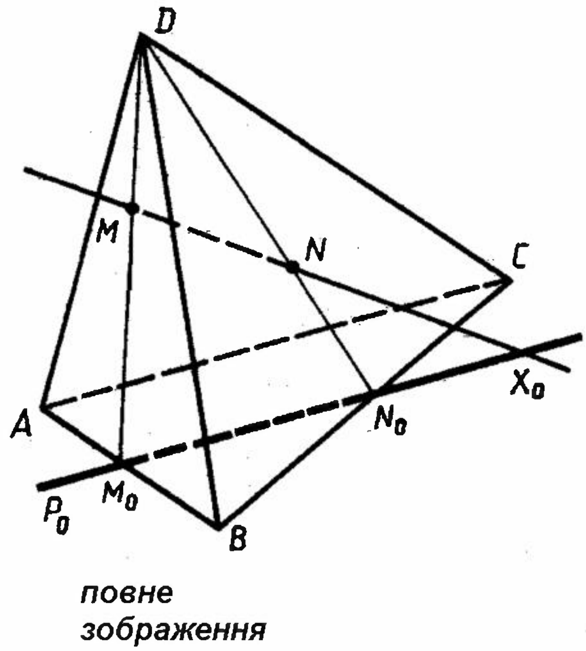


Рис.2.

Основні задачі при побудови плоских перерізів

При використанні будь-якого методу, побудова плоского перерізу многогранника зводиться до багаторазового розв'язування *двох основних задач*:

- побудувати точку перетину прямої (ребра многогранника) та січної площини;
- побудувати лінію перетину двох площин (січної площини і площини грані).

Розв'язання першої задачі простіше, тому часто для побудови перерізу многогранника визначають вершини перерізу як точки перетину ребер многогранника січною площиною. Побудувавши вершини перерізу, попарно сполучають відрізками прямих кожні дві вершини, що належать одній грані многогранника. При цьому, сторони перерізу, що належать невидимим граням, будуть невидимі (зображуються пунктиром), а які належать видимим граням – видимі (зображуються суцільними лініями).

Перша основна задача. ***Побудова точки перетину прямої з площиною.*** Розглянемо два випадки.

Задана призма (рис.3а). Для побудови точки перетину прямої KL з площиною α (сліду прямої KL на площині α) через пряму KL проводимо допоміжну площину, паралельну ребру призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основа якої лежить у площині α. Допоміжна площина буде перетинати бічні грані призми по прямих KK_1 і LL_1, паралельних ребру призми, а основу призми – по прямій K_1L_1. Ця пряма і буде тією лінією, по якій площина основи перетинається з допоміжною площиною KK_1L_1L. Якщо (KL) не паралельна (K_1L_1), то точка M їх перетину й буде шуканою.

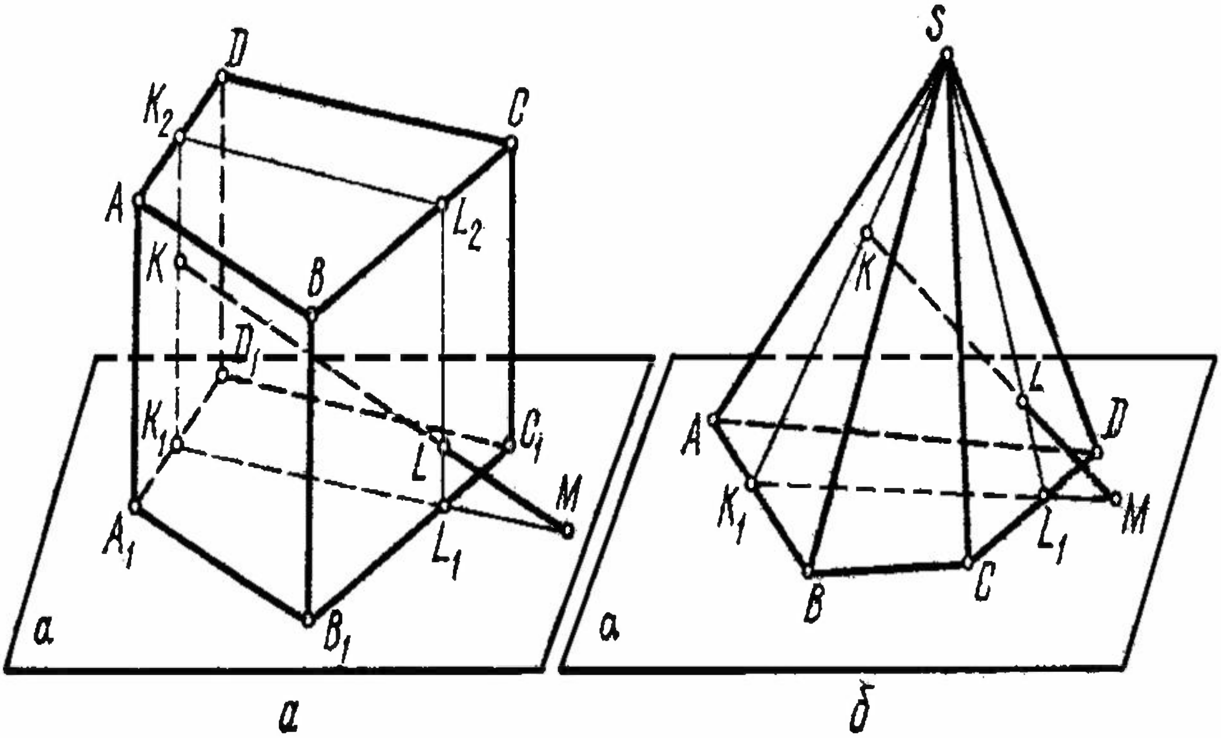


Рис. 3.

2. Якщо задана піраміда (рис.3б), то в багатьох випадках допоміжну площину доцільно (але не обов'язково) провести через вершину піраміди S. Така площина буде перетинати грані ABS і CDS по $[SK_1]$ і $[SL_1]$, а площину основи піраміди – по (K_1L_1). Шуканою точкою буде точка $M=(KL)\cap(K_1L_1)$.

Друга основна задача. *Побудова лінії перетину двох площин.*

Дано точки A_1, B_1, C_1, що не лежать на одній прямій, та їх проєкції A, B, C на площину α. Необхідно побудувати лінію перетину площин $A_1B_1C_1$ та α.

Дві площини перетинаються по прямій, для побудови якої достатньо знайти дві точки цієї прямої. Такими точками можуть бути, наприклад, точки перетину прямих A_1B_1 і A_1C_1 з площиною α. Їх побудова зводиться до наступних дій (рис.4):

1) $(AB)\cap(A_1B_1)=D$

2) $(AC)\cap(A_1C_1)=E$

3) $(DE)=m \Rightarrow (A_1B_1C_1)\cap\alpha=m$

Пряма m є слідом площини $A_1B_1C_1$ на площині α. Для наочності зображення можна частину площини $(A_1B_1C_1)=\beta$ обмежити довільним контуром.

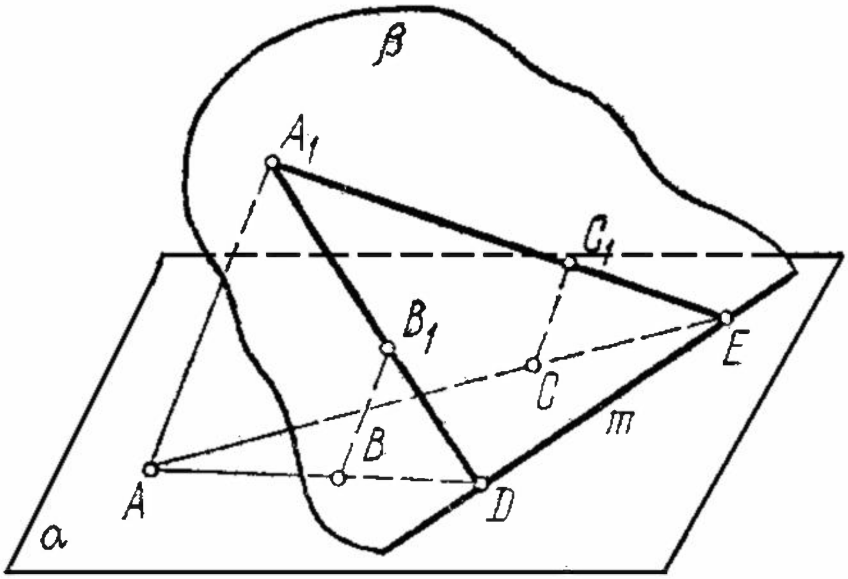


Рис.4.

Методи побудови перерізів

Метод слідів

Метод слідів полягає в побудові слідів січної площини на гранях даного многогранника.

Сліди січної площини на гранях многогранника можна будувати двома способами: (а) будувати сліди прямих, що лежать у січній площині, на гранях многогранника, а за ними знаходити сліди самої січної площини на цих гранях; (б) будувати третій слід тригранного кута за двома знайденими слідами на січній площині.

При використанні методу слідів рекомендується слідувати 4-кроковому **алгоритму побудови перерізів**:

1. Перевірити повноту зображення.
2. Побудувати слід січної площини на площині основи многогранника.
3. Знайти точки перетину сліду січної площини з площинами граней.
4. Сполучити ці точки – побудувати переріз.

Застосування методу слідів для побудови плоских перерізів призми згідно даного алгоритму розглянемо на конкретних задачах.

Задача 1. Дано призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ і точки $P_2 \in [BB_1]$, $Q_2 \in (AA_1F_1F)$, $R_2 \in (CC_1D_1D)$ (рис. 5). Побудувати переріз даної призми площиною $P_2Q_2R_2$, розглянувши різні випадки розташування точок P_2, Q_2, R_2.

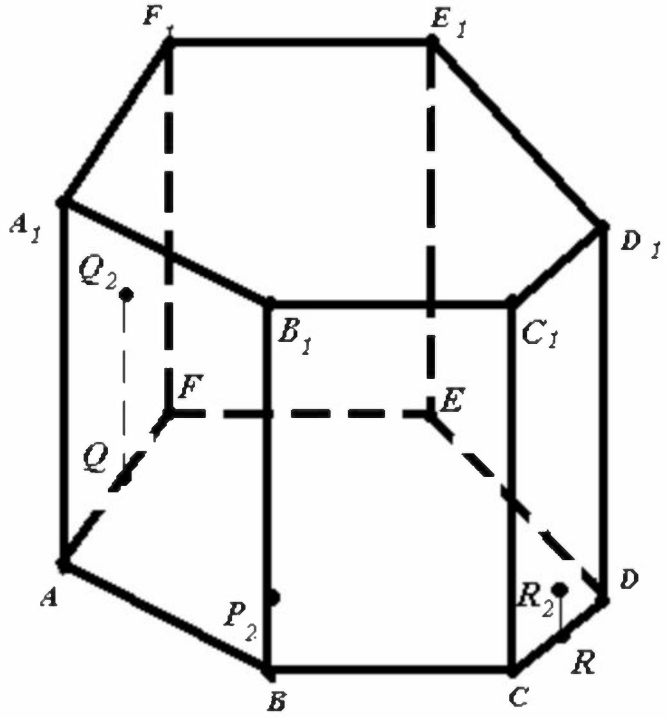


Рис. 5.

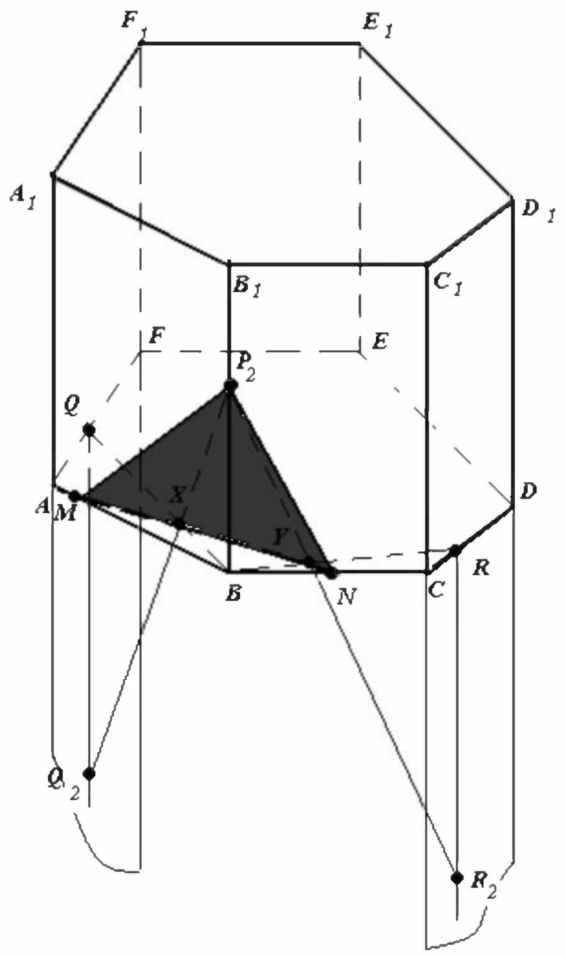


Рис.6.

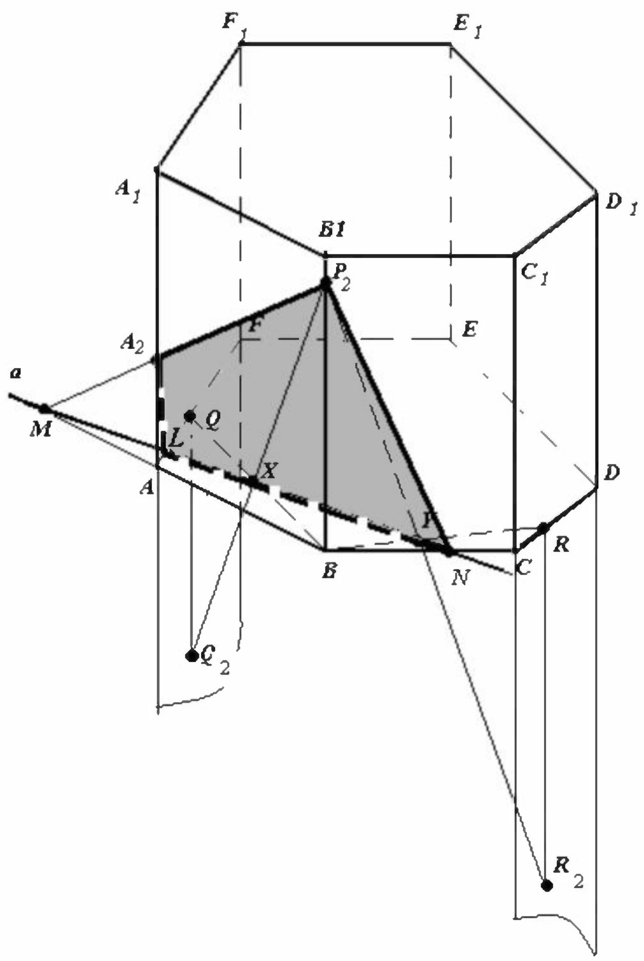


Рис.7.

Розглянемо шість різних випадків розташування даних точок.

Випадок 1 (рис.6).

1. B – проєкція точки P_2 на площину основи призми, Q – проєкція точки Q_2 на площину основи призми, R – проєкція точки R_2 на площину основи призми. Зображення повне.
2. $(P_2Q_2)\cap(BQ)=X$, $(P_2R_2)\cap(BR)=Y$. (XY) – слід$(P_2Q_2R_2)$ на площині основи призми.
3. $(XY)\cap(AB)=M$, $(XY)\cap(BC)=N$.
4. Шуканий переріз – трикутник P_2MN (рис.6).

Зауваження. Пряму XY слід розглядати не лише, як слід січної площини на площині основи призми, але й як *носій точок перетину* нескінченної сукупності прямих, які належать площині основи призми й перетинають січну площину. Це положення є одним з головних під час розв'язування задач на побудову перерізів геометричних тіл методом слідів.

Випадок 2 (рис.7).

1. B – проєкція точки P_2 на площину основи призми, Q – проєкція точки Q_2 на площину основи призми, R – проєкція точки R_2 на площину основи призми. Зображення повне.
2. $(P_2Q_2)\cap(BQ)=X$, $(P_2R_2)\cap(BR)=Y$. (XY) – слід$(P_2Q_2R_2)$ у площині основи призми.
3. $(XY)\cap(AF)=L$, $(XY)\cap(AB)=M$, $(XY)\cap(BC)=N$, $(MP_2)\cap(AA_1)=A_2$
4. Шуканий переріз – чотирикутник LA_2P_2N (рис.7).

Випадок 3 (рис.8).

1. B – проєкція точки P_2 на площину основи призми,
   Q – проєкція точки Q_2 на площину основи призми,
   R – проєкція точки R_2 на площину основи призми.
   Зображення повне.
2. $(P_2Q_2)\cap(BQ)=X$, $(P_2R_2)\cap(BR)=Y$.
   (XY) – слід$(P_2Q_2R_2)$ на площині основи призми.
3. $(XY)\cap(AF)=M$, $(XY)\cap(CD)=N$, $(XY)\cap(AB)=W$,
   $(WP_2)\cap(AA_1)=A_2$, $(XY)\cap(BC)=V$, $(VP_2)\cap(CC_1)=C_2$
4. Шуканий переріз – п'ятикутник $MA_2P_2C_2N$ (рис.8).

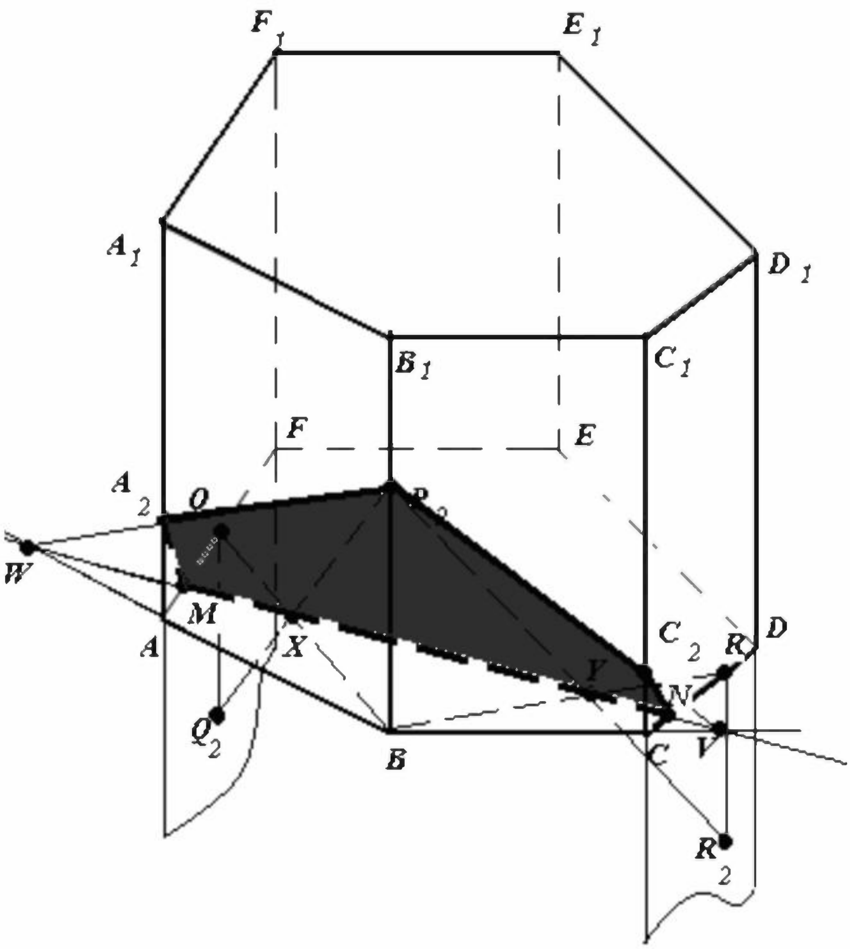


Рис.8.

Випадок 4 (рис. 9).

1. B – проєкція точки P_2 на площину основи призми,
   Q – проєкція точки Q_2 на площину основи призми,
   R – проєкція точки R_2 на площину основи призми.
   Зображення повне.
2. $(P_2Q_2)\cap(BQ)=X$, $(P_2R_2)\cap(BR)=Y$.
   (XY) – слід$(P_2Q_2R_2)$ на площині основи призми.
3. $(XY)\cap(RC)=Z$, $(ZR_2)\cap(CC_1)=C_2$, $(ZR_2)\cap(DD_1)=D_2$,
   $(XY)\cap(QA)=V$, $(VQ_2)\cap(AA_1)=A_2$, $(VQ_2)\cap(FF_1)=F_2$,
   $(XY)\cap(EB)=W$, $(WP_2)\cap(EE_1)=E_2$, $(XY)\cap(BC)=V$,
4. Шуканий переріз – шестикутник $A_2P_2C_2D_2E_2F_2$ (рис. 9).

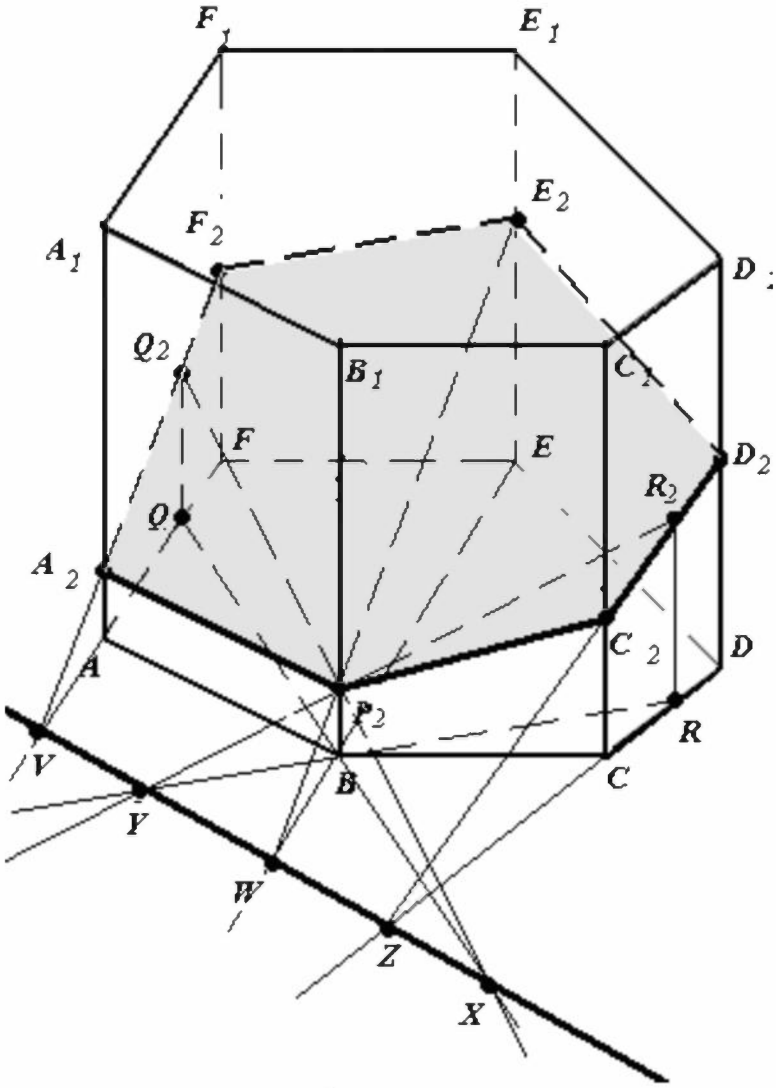


Рис. 9.

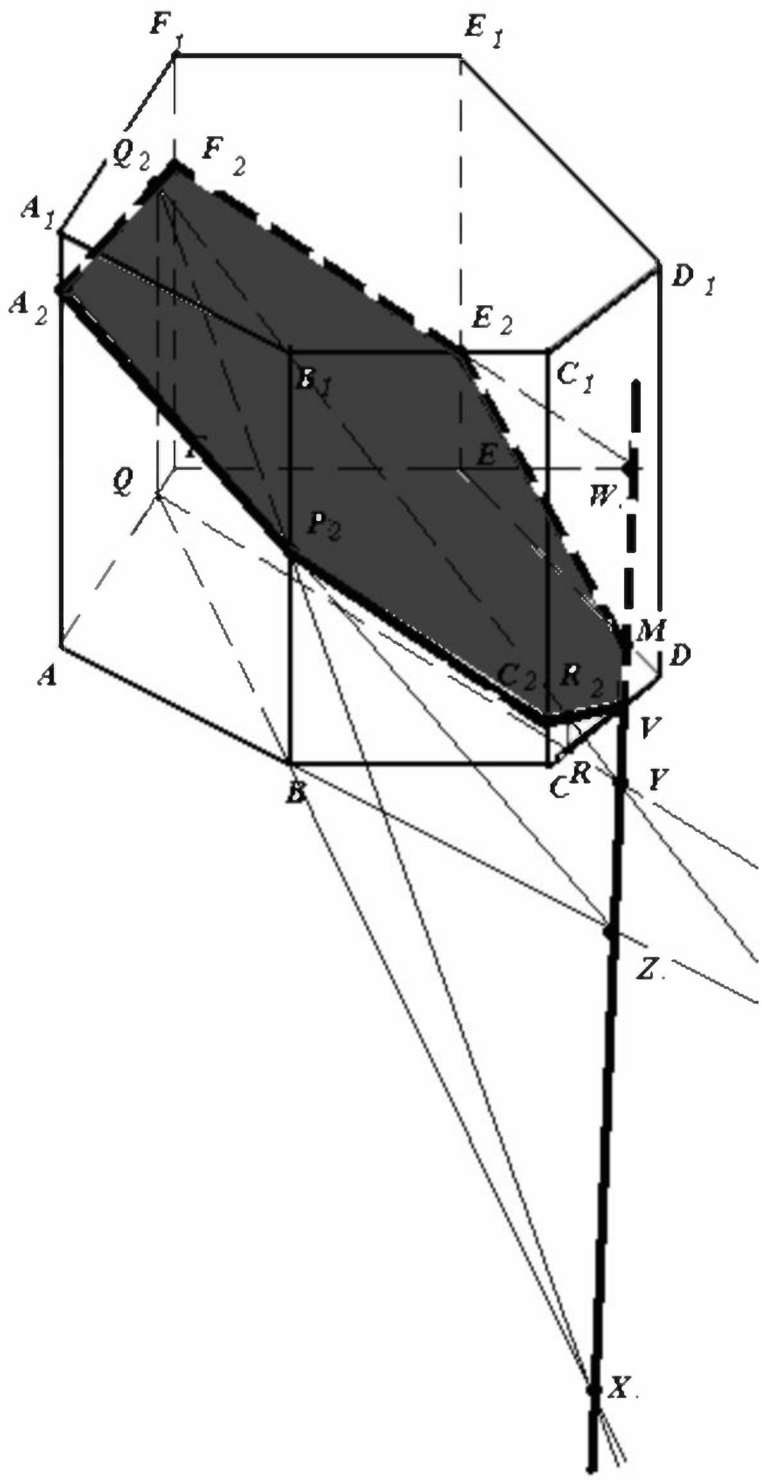


Рис. 10.

<u>Випадок 5 (рис. 10).</u>

1. B – проєкція точки P_2 на площину основи призми,
   Q – проєкція точки Q_2 на площину основи призми,
   R – проєкція точки R_2 на площину основи призми.
   Зображення повне.
2. $(P_2Q_2)\cap(BQ)=X$, $(Q_2R_2)\cap(QR)=Y$.

(XY) – слід$(P_2Q_2R_2)$ на площині основи призми.

3. $(XY)\cap(AB)=Z$, $(ZP_2)\cap(AA_1)=A_2$, $(CD)\cap(XY)=V$, $(XY)\cap(ED)=M$, $(XY)\cap(FE)=W$, $(A_2Q_2)\cap(FF_1)=F_2$, $(WF_2)\cap(EE_1)=E_2$

4. Шуканий переріз – семикутник $A_2P_2C_2VME_2F_2$ (рис. 10).

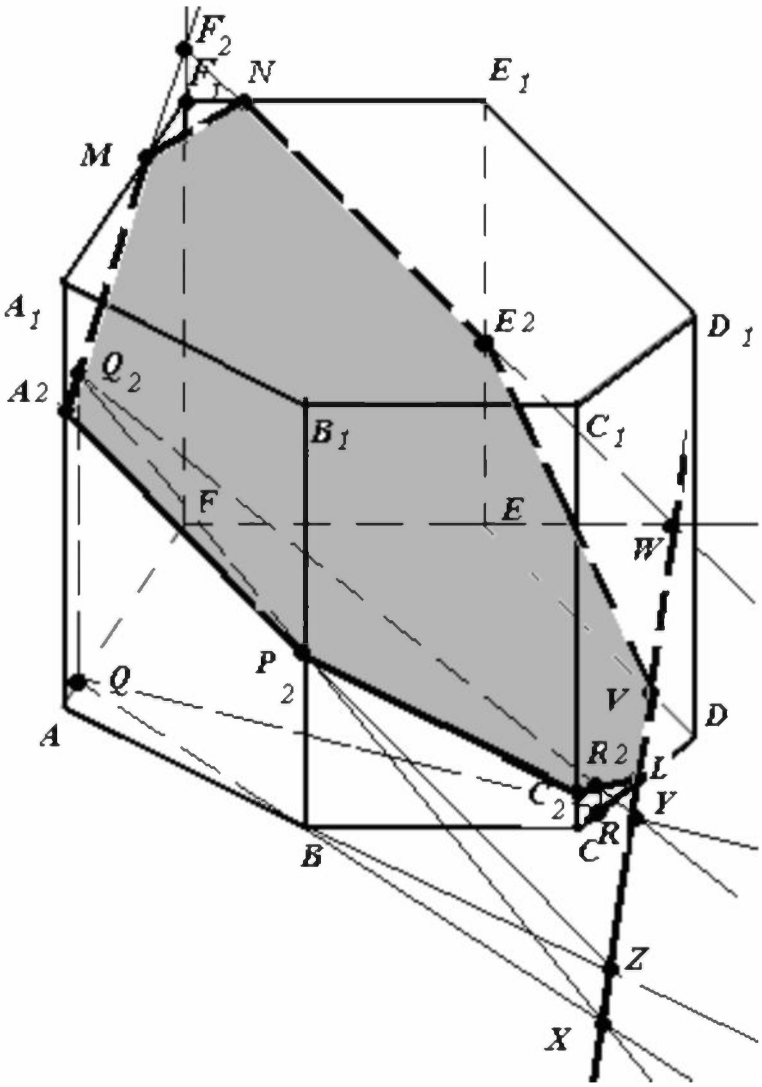


Рис. 11.

Випадок 6 (рис. 11).

1. B – проєкція точки P_2 на площину основи призми,
Q – проєкція точки Q_2 на площину основи призми,
R – проєкція точки R_2 на площину основи призми.

Зображення повне.

2. $(P_2Q_2)\cap(BQ)=X$, $(Q_2R_2)\cap(QR)=Y$.

   (XY) – слід$(P_2Q_2R_2)$ на площині основи призми.

3. $(XY)\cap(AB)=Z$, $(ZP_2)\cap(AA_1)=A_2$, $(CD)\cap(XY)=L$, $(XY)\cap(ED)=V$, $(XY)\cap(FE)=W$, $(A_2Q_2)\cap(A_1F_1)=M$, $(A_2Q_2)\cap(FF_1)=F_2$, $(WF_2)\cap(EE_1)=E_2$, $(WF_2)\cap(F_1E_1)=N$

4. Шуканий переріз – восьмикутник $A_2P_2C_2LVE_2NM$ (рис. 11).

Таким чином, представлений вище алгоритм побудови плоских перерізів многогранників методом слідів дозволяє розв'язати задачу у представлених вище простих випадках.

Задача 2. Дано призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ і точки $P_2\in[BB_1]$, $Q_2\in(AA_1F_1F)$, $R_2\in(CC_1D_1D)$. Використовуючи метод слідів, побудувати переріз даної призми площиною $P_2Q_2R_2$.

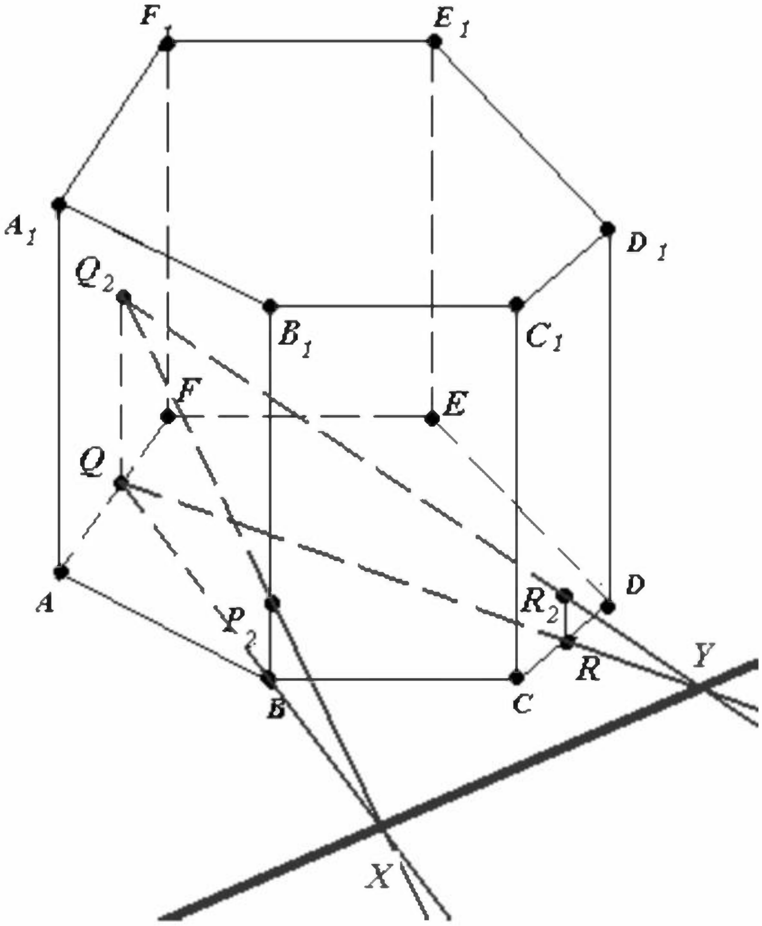


Рис. 12.

Згідно сформульованого вище алгоритму, послідовність виконуваних міркувань є наступною:

1. B – проєкція точки P_2 на площину основи призми,
   Q – проєкція точки Q_2 на площину основи призми,
   R – проєкція точки R_2 на площину основи призми.
   Зображення (рис. 12) повне.
2. $(P_2Q_2)\cap(BQ)=X$, $(Q_2R_2)\cap(QR)=Y$ (рис. 13).
   (XY) – слід$(P_2Q_2R_2)$ на площині основи призми.
3. $(XY)\cap(RC)=W$, $(WR_2)\cap(CC_1)=C_2$, $(AB)\cap(XY)=Z$, $(ZP_2)\cap(AA_1)=A_2$, $(WR_2)\cap(DD_1)=D_2$, $(ED)\cap(XY)=V$, $(WD_2)\cap(EE_1)=E_2$, $(A_2Q_2)\cap(FF_1)=F_2$ (рис. 14).
4. Шуканий переріз – шестикутник $A_2P_2C_2D_2E_2F_2$ (рис. 14).

4. Шестикутник $A_2P_2C_2D_2E_2F_2$ (рис. 14) – шуканий переріз.

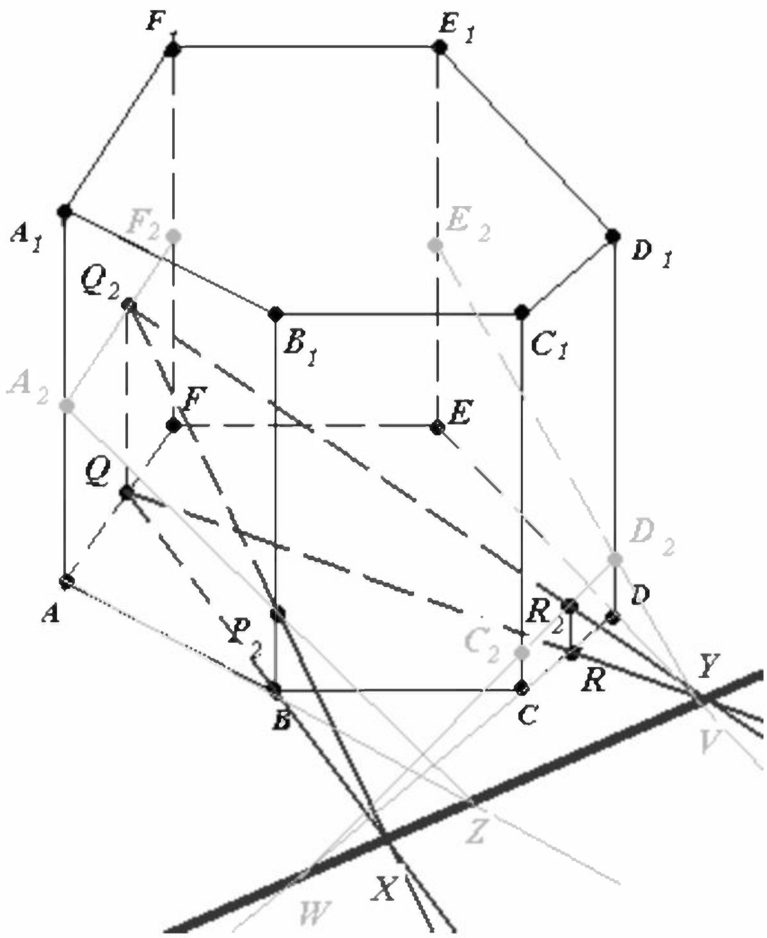


Рис. 13.

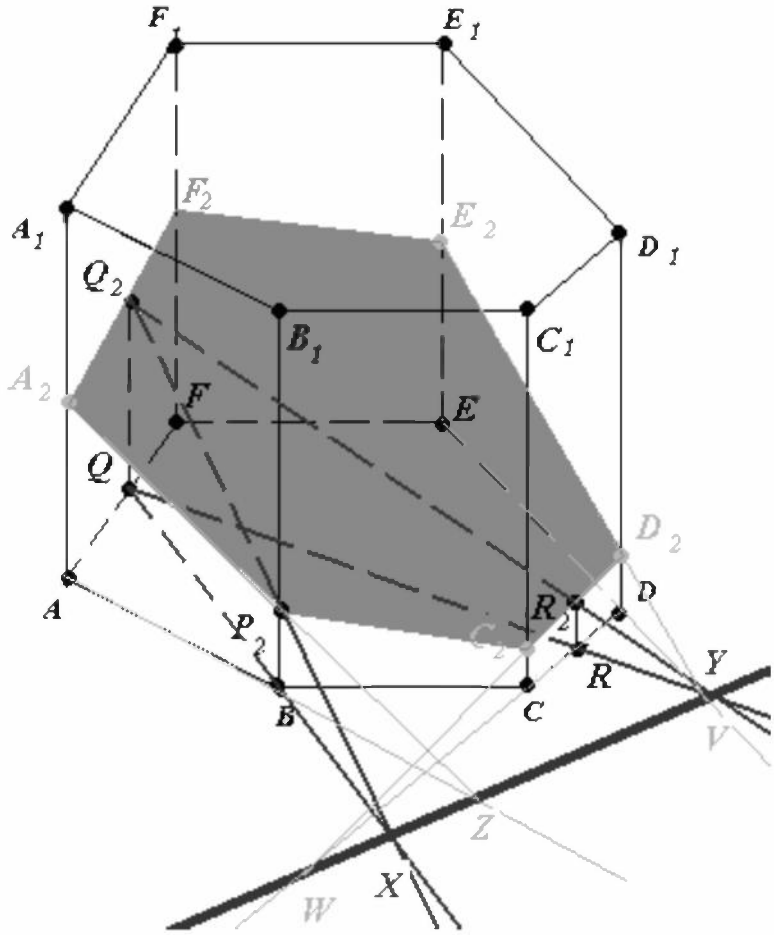


Рис. 14.

Задача 3. Методом слідів побудувати переріз піраміди $SABCDE$ площиною $P_2Q_2R_2$, якщо $P_2 \in [SB]$ $Q_2 \in (AES)$, $R_2 \in [SC]$ (рис. 15).

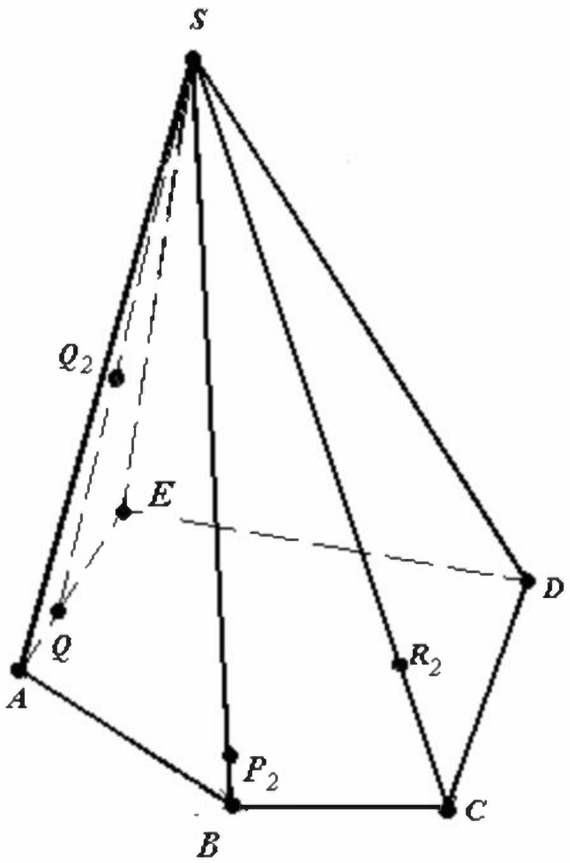


Рис. 15.

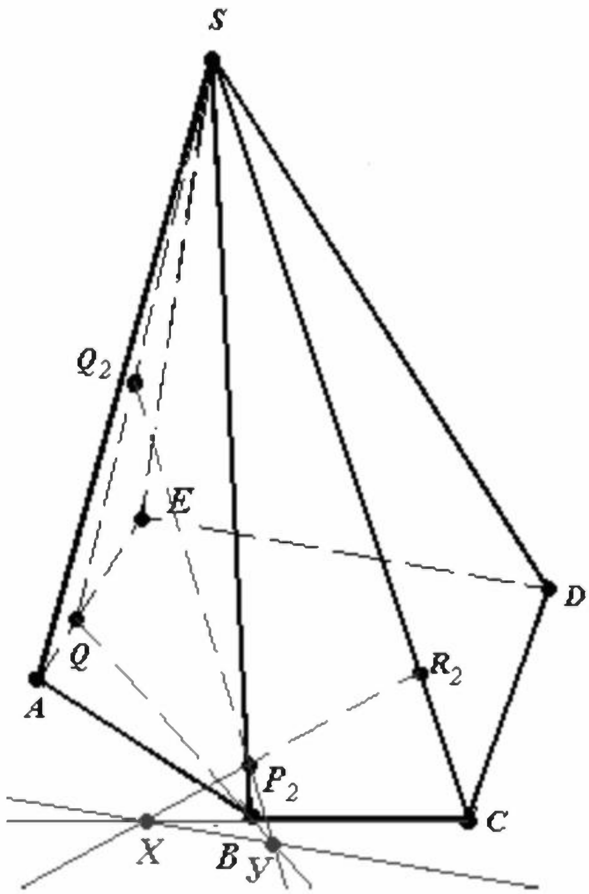


Рис. 16.

1. Q – проєкція точки Q_2 на площину основи піраміди,
   B – проєкція точки P_2 на площину основи піраміди,
   C – проєкція точки R_2 на площину основи піраміди.
   Зображення (рис. 15) повне.
2. $(P_2Q_2)\cap(BQ)=X$, $(Q_2R_2)\cap(QR)=Y$.
   (XY) – слід$(P_2Q_2R_2)$ на площині основи піраміди.
3. $(DC)\cap(XY)=V$, $(VR_2)\cap(DS)=D_2$, $(AE)\cap(XY)=Z$, $(ZQ_2)\cap(AS)=A_2$, $(ZQ_2)\cap(ES)=E_2$ (рис. 17)
4. Шуканий переріз – п’ятикутник $A_2P_2R_2D_2E_2$ (рис. 18).

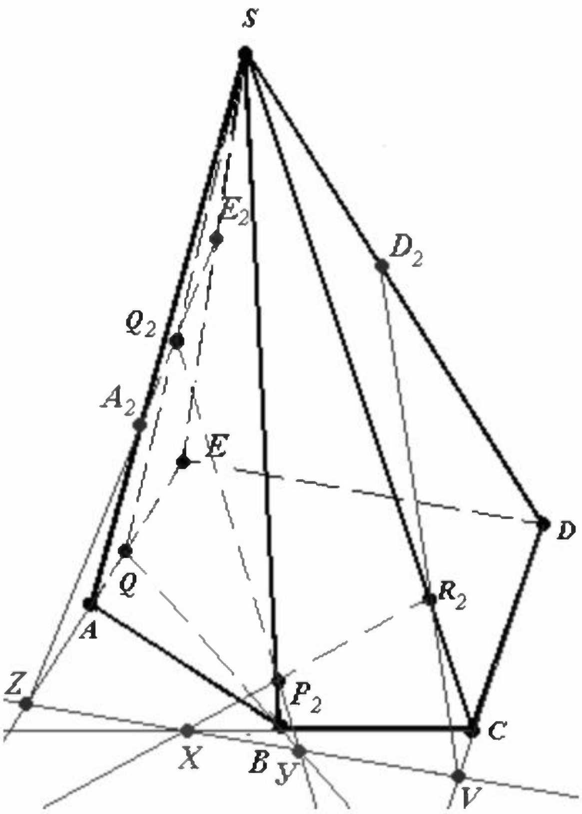


Рис. 17.

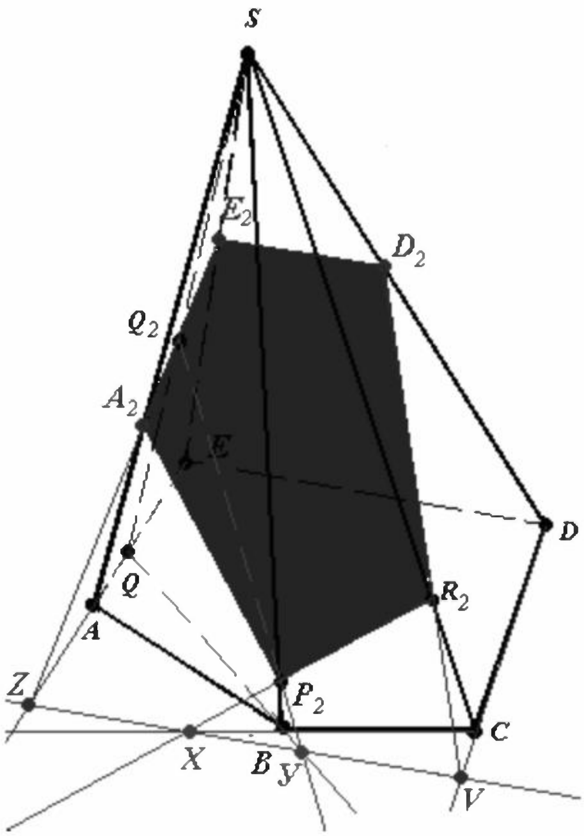


Рис. 18.

Висновки:

1. Задача на побудову точки перетину прямої з площиною є основою методу розв'язування задач на побудову перерізів многогранників методом слідів.
2. Побудова сліду перетину січної площини з основною площиною є головним етапом у розв'язуванні задачі на знаходження перерізу.
3. Побудова сліду можлива, якщо задана січна площина не паралельна основній площині і не виходить за межі аркуша паперу.

Метод відповідності

Між точками будь-якої площини, яка не є проєктуючою відносно основної площини, і точками основної площини існує взаємно однозначна відповідність. Це означає, що коли на малюнку задано якусь площину (наприклад, трьома точками), то для кожної точки цієї площини можна побудувати її проєкцію, і, навпаки, знаючи проєкцію точки даної площини, можна побудувати цю точку.

Метод відповідності або *метод внутрішнього проєктування* ґрунтується на взаємно однозначній відповідності між точками січної площини та їх проєкціями на основну площину.

Метод відповідності зручно застосовувати тоді, коли слід січної площини у площині основи многогранника або тіла обертання лежить за межами креслення цих фігур. Незручність цього методу полягає у тому, що велика кількість штрихових ліній, які доводиться проводити в процесі розв'язування задачі, викликає помітні труднощі в читанні креслень.

Розглянемо задачу на побудову точки перетину січної площини з проєктуючою прямою для випадку паралельного і центрального проєктування.

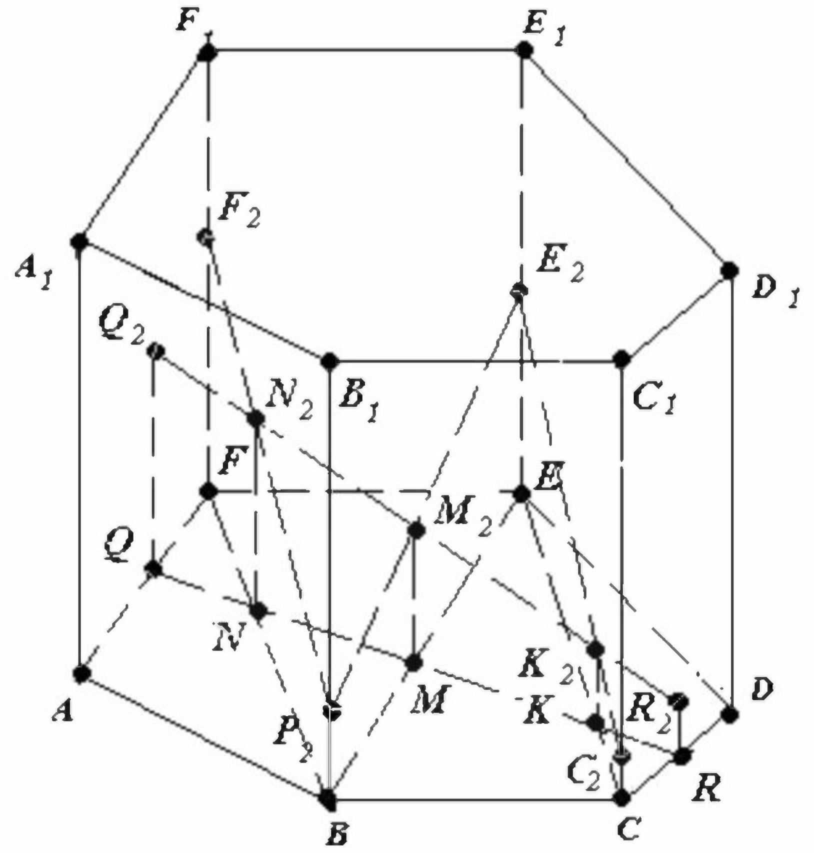
Алгоритм побудови перерізу методом відповідності:

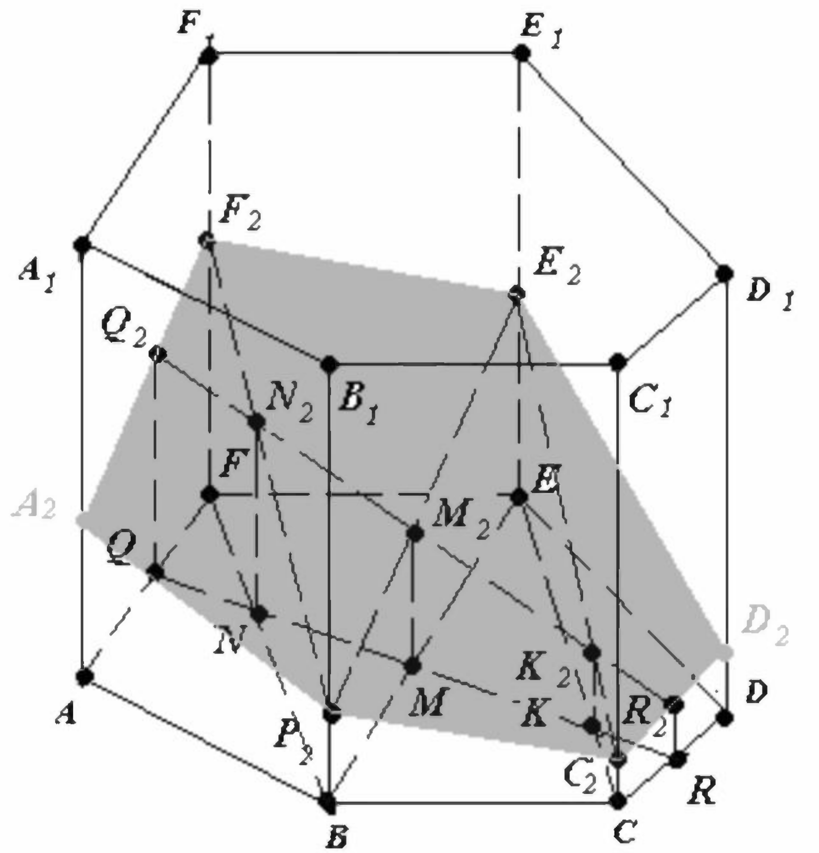
1. Перевіряємо повноту зображення. Вибираємо напрям проєктування (для призми – напрям бічного ребра; для піраміди – використовуємо центральне проєктування з центром у вершині піраміди).
2. Знаходимо точки перетину проєкції заданої прямої з діагоналями основи. Будуємо відповідні їм точки у площині перерізу.

3. Знаходимо точки перетину прямих, що належать перерізу з бічними ребрами призми (піраміди).
4. Будуємо переріз.

Задача 4. Дано призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ і точки $P_2 \in [BB_1]$, $Q_2 \in (AA_1F_1F)$, $R_2 \in (CC_1D_1D)$ (рис. 5). Побудувати переріз даної призми площиною $P_2Q_2R_2$, використовуючи метод відповідності.

1. Q – проєкція точки Q_2 на площину основи піраміди,
   B – проєкція точки P_2 на площину основи піраміди,
   C – проєкція точки R_2 на площину основи піраміди.
   Зображення (рис. 18) повне.
2. $(QR) \cap (BF) = N$, $(QR) \cap (BE) = M$, $(QR) \cap (EC) = K$
   проводимо через точку N пряму $n \| QQ_2$
   проводимо через точку M пряму $m \| QQ_2$
   проводимо через точку K пряму $k \| QQ_2$
   $n \cap (Q_2R_2) = N_2$, $m \cap (Q_2R_2) = M_2$, $k \cap (Q_2R_2) = K_2$
3. $(P_2N_2) \cap (FF_1) = F_2$, $(P_2M_2) \cap (EE_1) = E_2$,
   $(E_2K_2) \cap (CC_1) = C_2$, $(F_2Q_2) \cap (AA_1) = A_2$,
   $(C_2R_2) \cap (DD_1) = D_2$
4. Шуканий переріз – шестикутник $A_2P_2C_2D_2E_2F_2$ (рис. 19).


F1
E1
F2
A1
E2
D1
Q2
N2
B1
C1
F
E
M2
Q
N
K2
D
A
M
K
R2
P2
C2
R
B
C
Рис.18


F1
E1
F2
E2
A1
D1
Q2
N2
B1
C1
F
E
A2
M2
Q
D2
N
K2
D
M
A
K
R2
P2
C2
R
B
C
Рис. 19.

Задача 5. Використовуючи метод відповідності, побудувати переріз піраміди $SABCDE$ площиною $P_2Q_2R_2$, якщо $P_2 \in [SB]$ $Q_2 \in (AES)$, $R_2 \in [SC]$ (рис. 15).

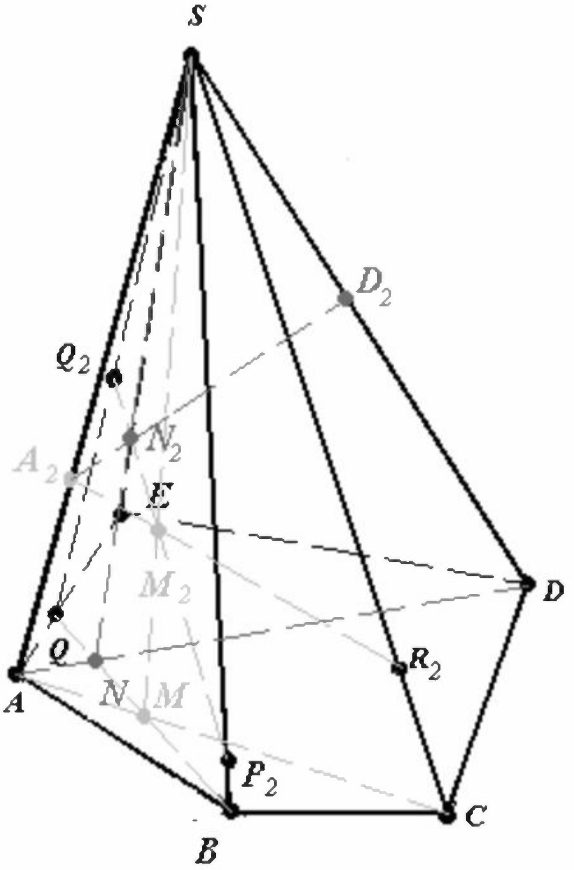


Рис. 20.

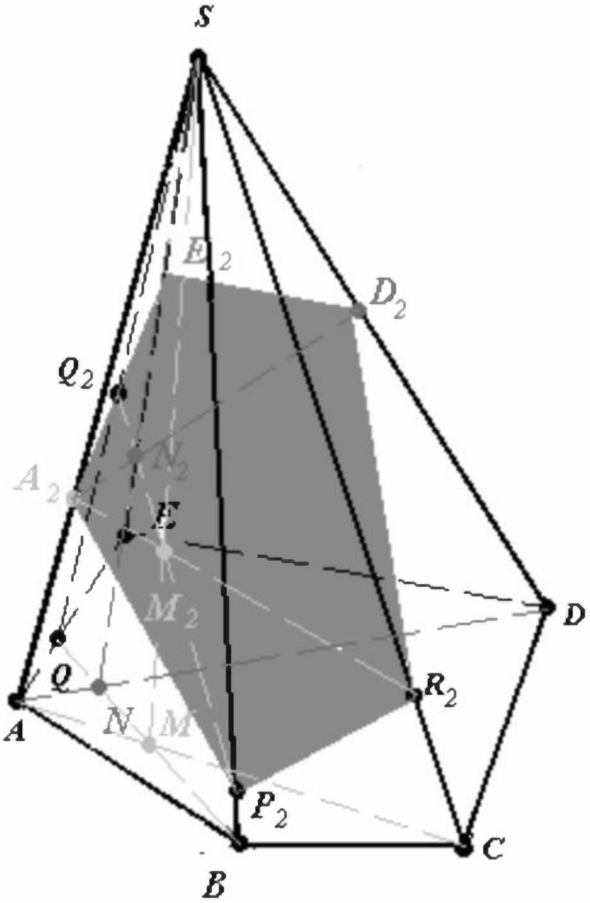


Рис. 21.

1. Q – проєкція точки Q_2 на площину основи піраміди, B – проєкція точки P_2 на площину основи піраміди, C – проєкція точки R_2 на площину основи піраміди. Зображення (рис. 20) повне.
2. $(QB)\cap(AC)=M$, $(MS)\cap(P_2Q_2)=M_2$, $(BQ)\cap(AD)=N$, $(NS)\cap(P_2Q_2)=N_2$
3. $(R_2M_2)\cap(AS)=A_2$, $(A_2N_2)\cap(DS)=D_2$, $(A_2Q_2)\cap(ES)=E_2$
4. Шуканий переріз – п'ятикутник $A_2P_2R_2D_2E_2$ (рис. 21).

Метод поділу на трикутні многогранники

Алгоритм побудови перерізу

1. Перевіряємо повноту зображення.
2. З даної $n-$кутної призми (піраміди) виділяємо трикутну, на ребрах якої лежать точки, що визначають січну площину. Будуємо переріз цієї призми (піраміди).
3. Будуємо перерізи інших трикутних призм (пірамід), які мають спільні частини з даним многогранником.
4. Визначаємо площину шуканого перерізу.

Задача 6. Використовуючи метод поділу $n-$кутної призми на трикутні, побудувати переріз призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площиною $P_2Q_2R_2$, якщо $P_2 \in [BB_1]$, $Q_2 \in (AA_1F_1F)$, $R_2 \in (CC_1D_1D)$ (рис. 22).

1. Q – проєкція точки Q_2 на площину основи піраміди,
   B – проєкція точки P_2 на площину основи піраміди,
   R – проєкція точки R_2 на площину основи піраміди.
   Зображення (рис. 22) повне.
2. $\Delta P_2Q_2R_2$ переріз призми $BQRB_1Q_1R_1$ (рис. 22)
3. $(FF_1B_1B) \cap (QQ_1B_1B) = (NN_1)$, $(NN_1) \cap (Q_2R_2) = N_2$,
   $(P_2N_2) \cap (FF_1) = F_2$ (рис. 23)
   $\Delta P_2Q_2F_2$ переріз призми $BQFB_1Q_1F_1$ (рис. 23)
   $\Delta P_2F_2E_2$ переріз призми $BFEB_1F_1E_1$ (рис. 24)
   $\Delta P_2E_2D_2$ переріз призми $BEDB_1E_1D_1$ (рис. 24)
4. $(D_2R_2) \cap (CC_1) = C_2$, $(F_2Q_2) \cap (AA_1) = A_2$
   Шуканий переріз – шестикутник $A_2P_2C_2D_2E_2F_2$ (рис. 25).

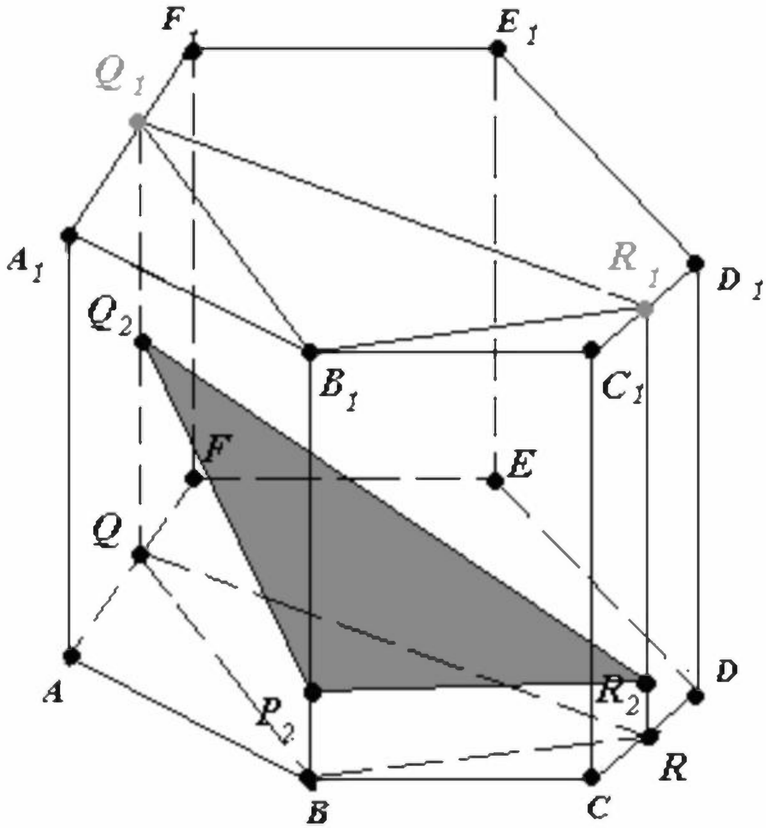

F_1
E_1
Q_1
A_1
R_1
D_1
Q_2
B_1
C_1
F
E
Q
A
P_2
R_2
D
R
B
C

Рис. 22.

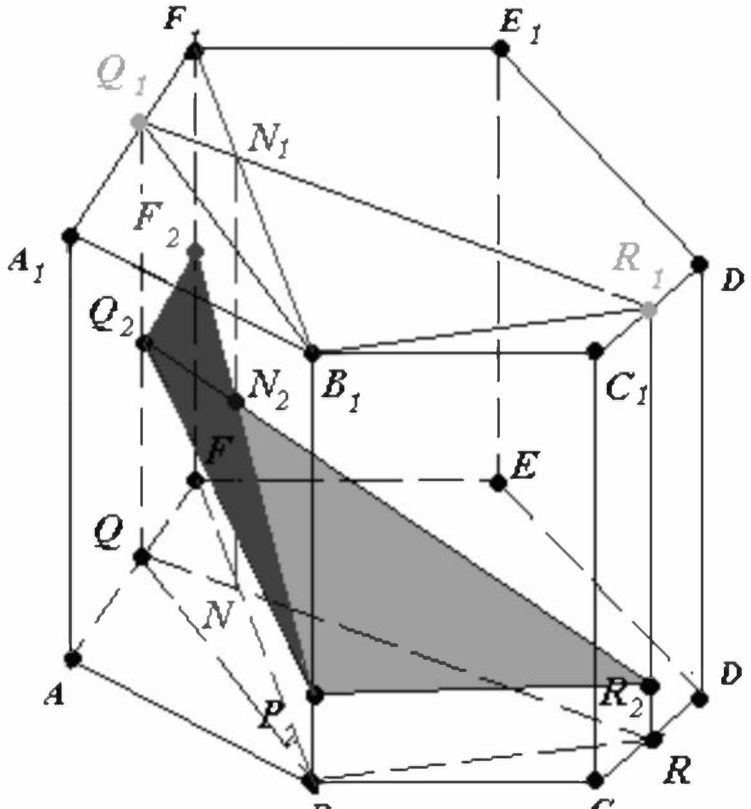

F_1
E_1
Q_1
N_1
F_2
A_1
R_1
D
Q_2
N_2
B_1
C_1
F
E
Q
N
A
P_2
R_2
D
R
B
C

Рис. 23.

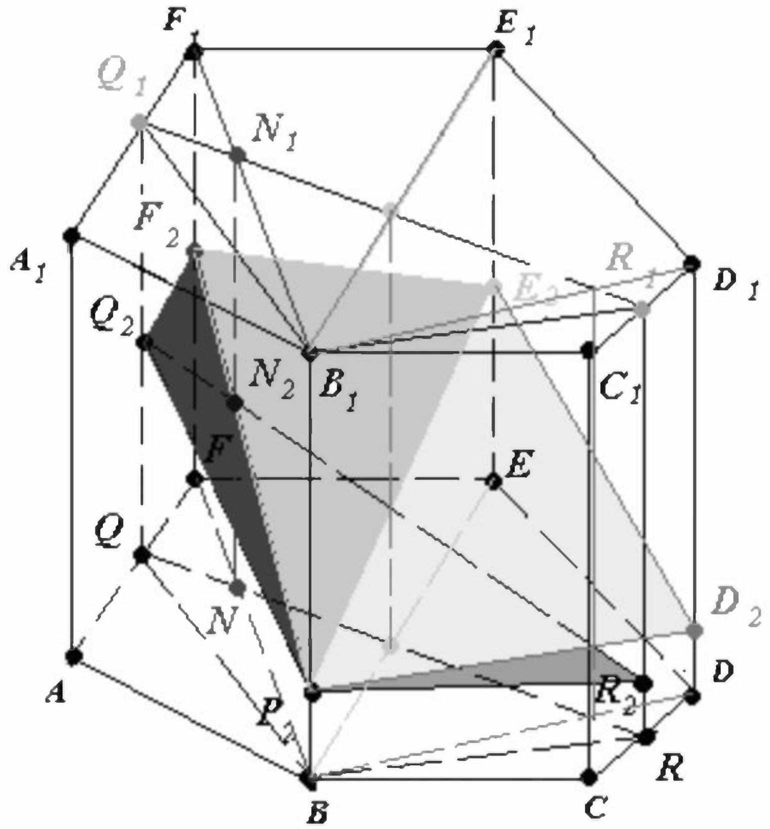

F1
E1
Q1
N1
F2
R1
A1
E2
D1
Q2
N2
B1
C1
F
E
Q
D2
N
A
D
R2
P2
R
B
C

Рис. 24.

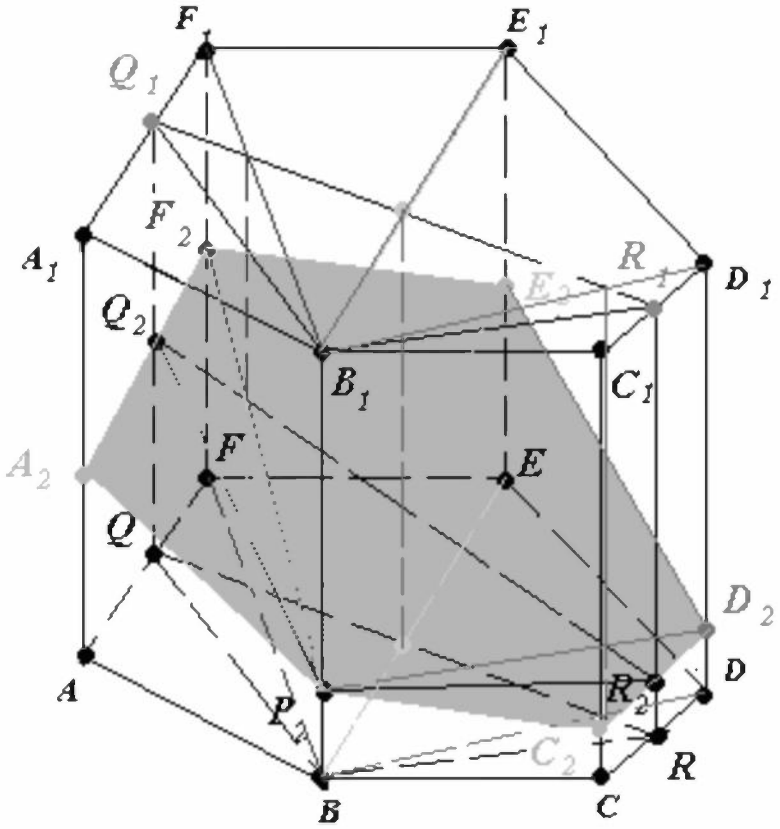

F1
E1
Q1
F2
R1
A1
E2
D1
Q2
B1
C1
A2
F
E
Q
D2
A
D
R2
P2
C2
R
B
C

Рис. 25.

Задача 7. Використовуючи метод поділу n–кутної піраміди на трикутні, побудувати переріз піраміди $SABCDE$ площиною $P_2Q_2R_2$, якщо $P_2 \in [SB]$ $Q_2 \in (AES)$, $R_2 \in [SC]$ (рис. 15).

1. Q – проєкція точки Q_2 на площину основи піраміди,
   B – проєкція точки P_2 на площину основи піраміди,
   C – проєкція точки R_2 на площину основи піраміди.
   Зображення (рис. 15) повне.
2. $\Delta P_2Q_2R_2$ переріз піраміди $SBQC$ (рис. 26)
   $(BES) \cap (QCS) = (MS)$,
   $(MS) \cap (Q_2R_2) = M_2$, $(ES) \cap (P_2M_2) = E_2$ (рис. 27)
3. $\Delta P_2D_2R_2$ переріз піраміди $SBDC$ (рис. 28)
   $(E_2Q_2) \cap (AS) = A_2$ (рис. 29)
4. Шуканий переріз – п’ятикутник $A_2P_2R_2D_2E_2$ (рис. 29).

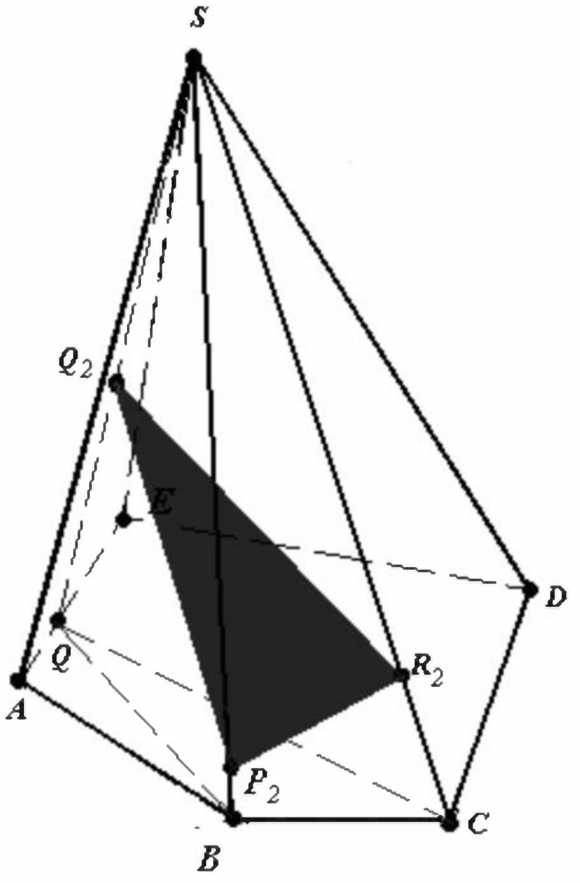


Рис. 26.

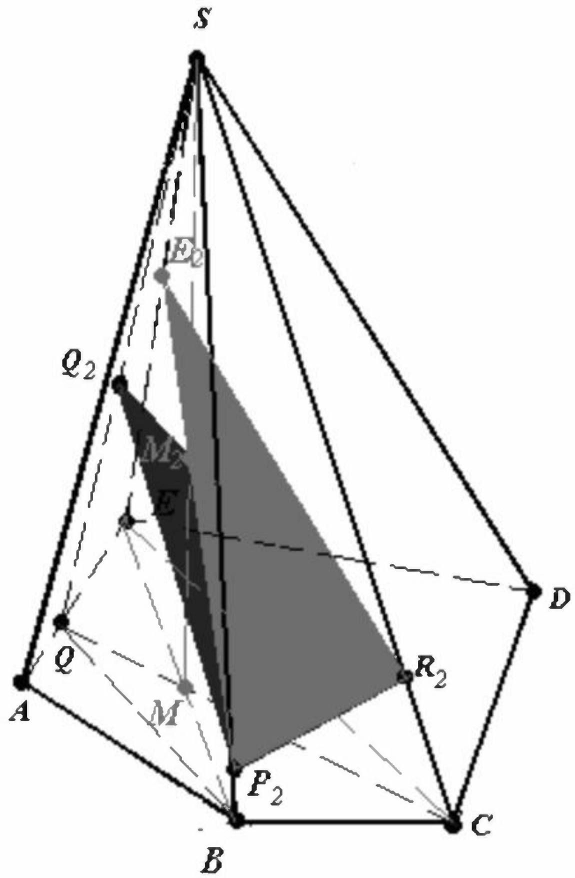


Рис. 27.

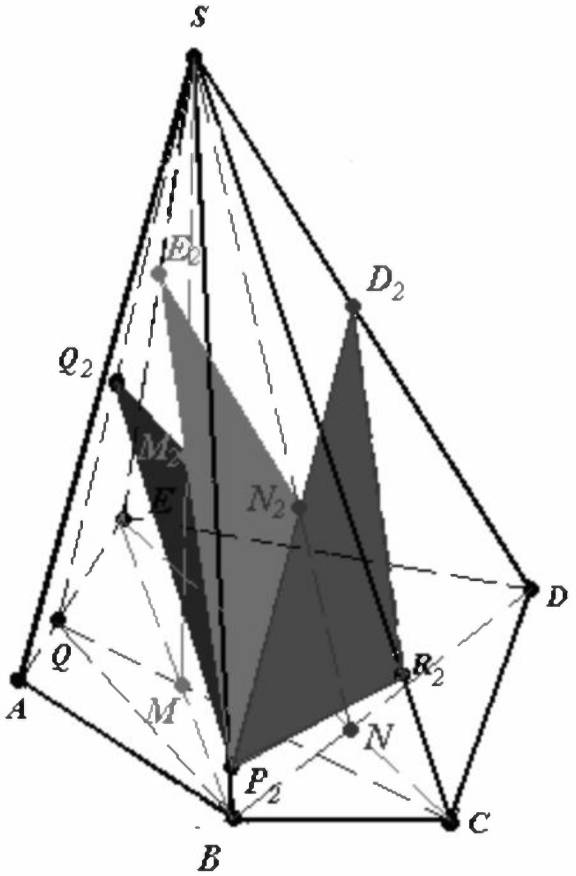


Рис. 28.

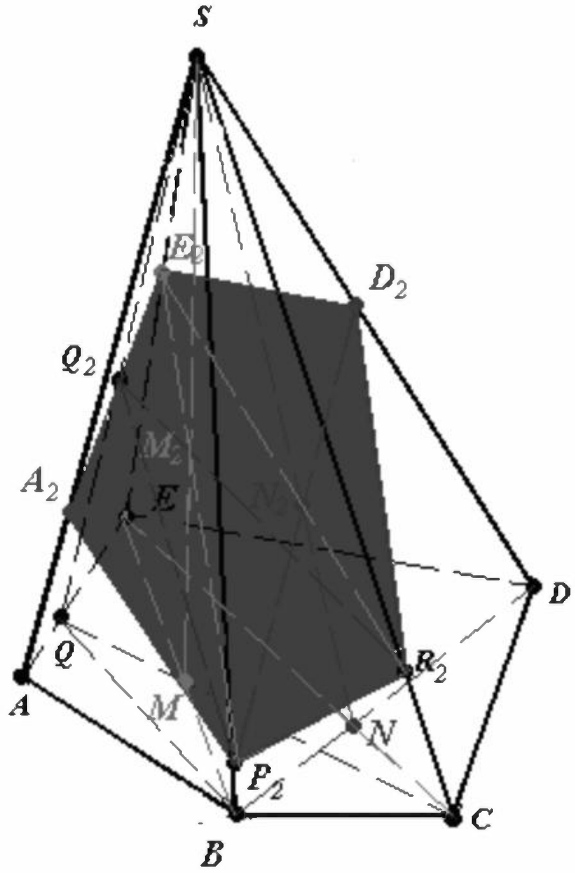


Рис. 29.

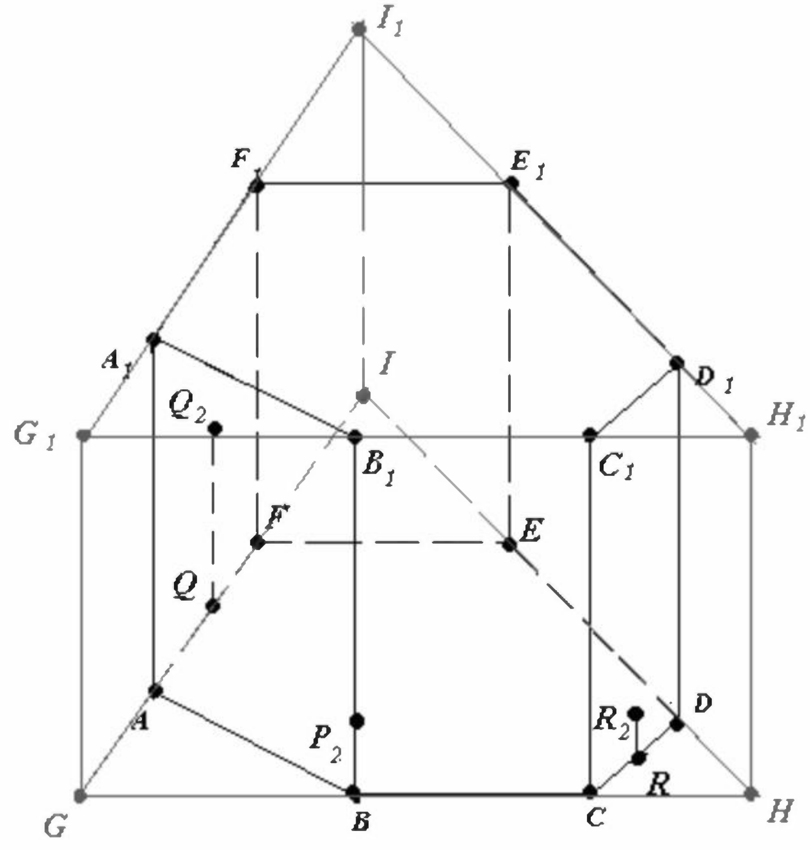
Метод доповнення до трикутного многогранника

Алгоритм побудови:

1. Перевірити повноту зображення.
2. Добудувати задану призму (або піраміду) до трикутної.
3. Побудувати переріз добудованого трикутного многогранника.
4. Шуканий переріз дістаємо як частину перерізу трикутної призми (піраміди).

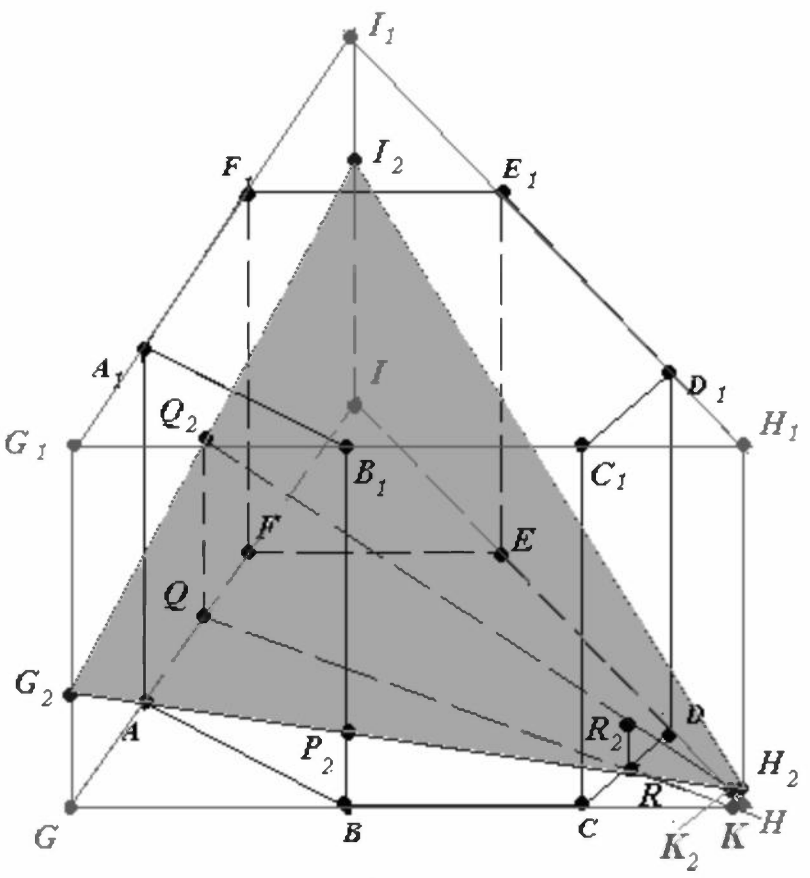
Задача 8. Використовуючи метод доповнення n–кутної призми до трикутної призми, побудувати переріз призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площиною $P_2Q_2R_2$, якщо $P_2 \in [BB_1]$, $Q_2 \in (AA_1F_1F)$, $R_2 \in (CC_1D_1D)$ (рис. 30).

1. Q – проєкція точки Q_2 на площину основи піраміди,
   B – проєкція точки P_2 на площину основи піраміди,
   R – проєкція точки R_2 на площину основи піраміди.
   Зображення (рис. 30) повне.
2. $GHIG_1H_1I_1$ – доповнена трикутна призма, причому, $Q_2 \in (GG_1I_1I)$, $P_2 \in (GG_1H_1H)$ (рис. 30)
3. $(QR) \cap (GH) = K$ (рис. 31)
   Через точку K проводимо пряму $k \| HH_1$
   $(Q_2R_2) \cap k = K_2$, $(P_2K_2) \cap (HH_1) = H_2$, $(P_2K_2) \cap (GG_1) = G_2$
   $(G_2Q_2) \cap (II_1) = I_2$
   $G_2H_2I_2$ – переріз трикутної призми $GHIG_1H_1I_1$
4. $(G_2I_2) \cap (AA_1) = A_2$, $(G_2I_2) \cap (FF_1) = F_2$,
   $(G_2H_2) \cap (CC_1) = C_2$, $(H_2I_2) \cap (DD_1) = D_2$,
   $(H_2I_2) \cap (EE_1) = E_2$(рис. 32).
   $A_2P_2C_2D_2E_2F_2$ – шуканий переріз.



I_1
F_1
E_1
A_1
I
D_1
Q_2
G_1
H_1
B_1
C_1
F
E
Q
R_2
D
A
P_2
R
G
B
C
H

Рис. 30.



I_1
I_2
F_1
E_1
A_1
I
D_1
Q_2
G_1
H_1
B_1
C_1
F
E
Q
G_2
R_2
D
A
P_2
H_2
R
G
B
C
K_2
K
H

Рис. 31.

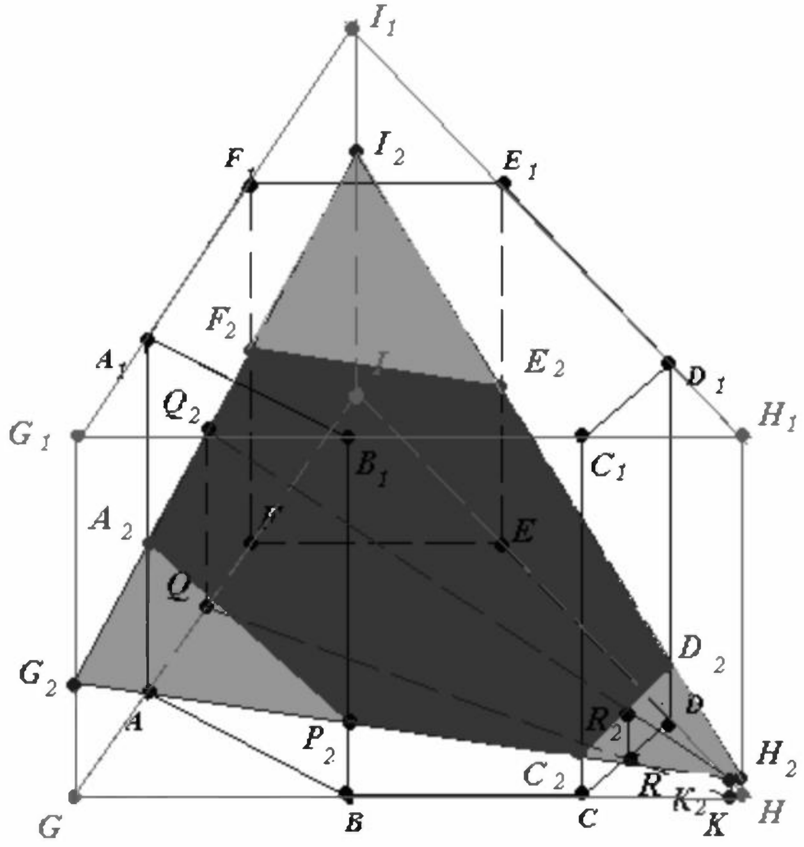


Рис. 32.

Задача 9. Методом доповнення n–кутної піраміди до трикутної, побудувати переріз піраміди $SABCDE$ площиною $P_2Q_2R_2$, якщо $P_2 \in [SB]$, $Q_2 \in (AES)$, $R_2 \in [SC]$ (рис. 15).

1. Q – проєкція точки Q_2 на площину основи піраміди,
   B – проєкція точки P_2 на площину основи піраміди,
   C – проєкція точки R_2 на площину основи піраміди.
   Зображення (рис. 33) повне.
2. $SGHI$ – доповнена трикутна піраміда, причому,
   $P_2 \in (GHS)$, $R_2 \in (GHS)$, $Q_2 \in (GIS)$ (рис. 33)
3. $(P_2R_2) \cap (SH) = H_2$, $(P_2R_2) \cap (SG) = G_2$,
   $(G_2Q_2) \cap (SI) = I_2$ (рис. 34)
   $G_2H_2I_2$ – переріз трикутної піраміди $SGHI$
4. $(G_2I_2) \cap (AS) = A_2$, $(G_2I_2) \cap (ES) = E_2$,
   $(I_2H_2) \cap (DS) = D_2$ (рис. 35)
   Шуканий переріз – п'ятикутник $A_2P_2R_2D_2E_2$

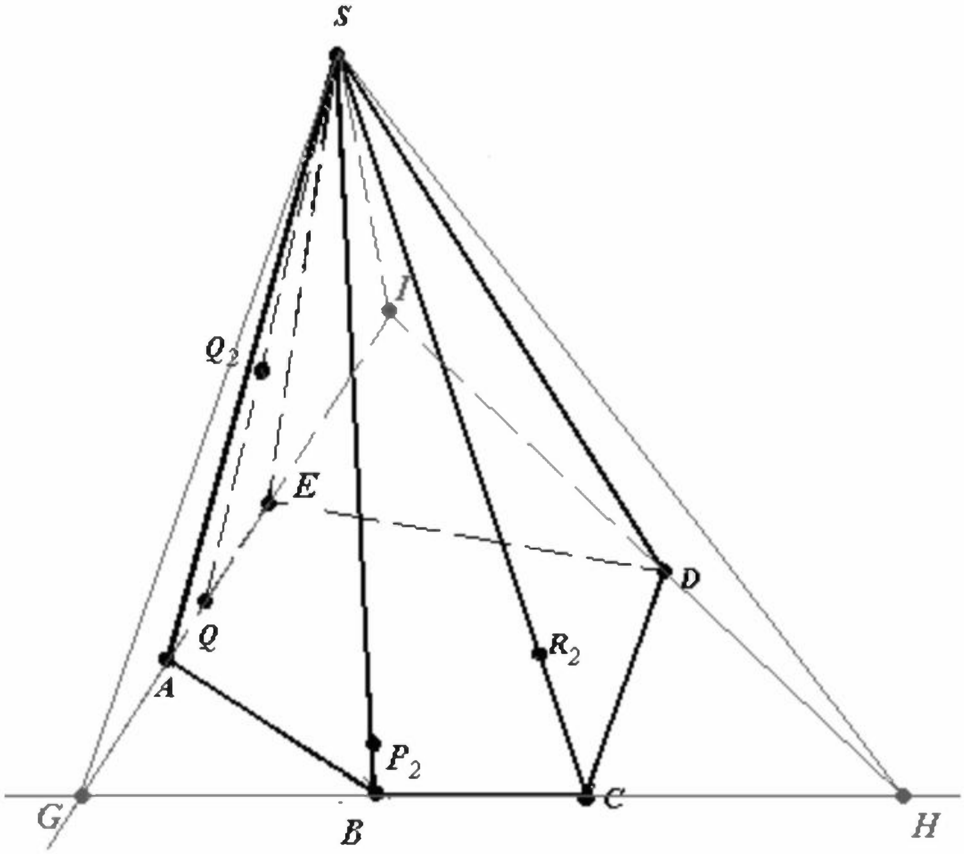


Рис. 33.

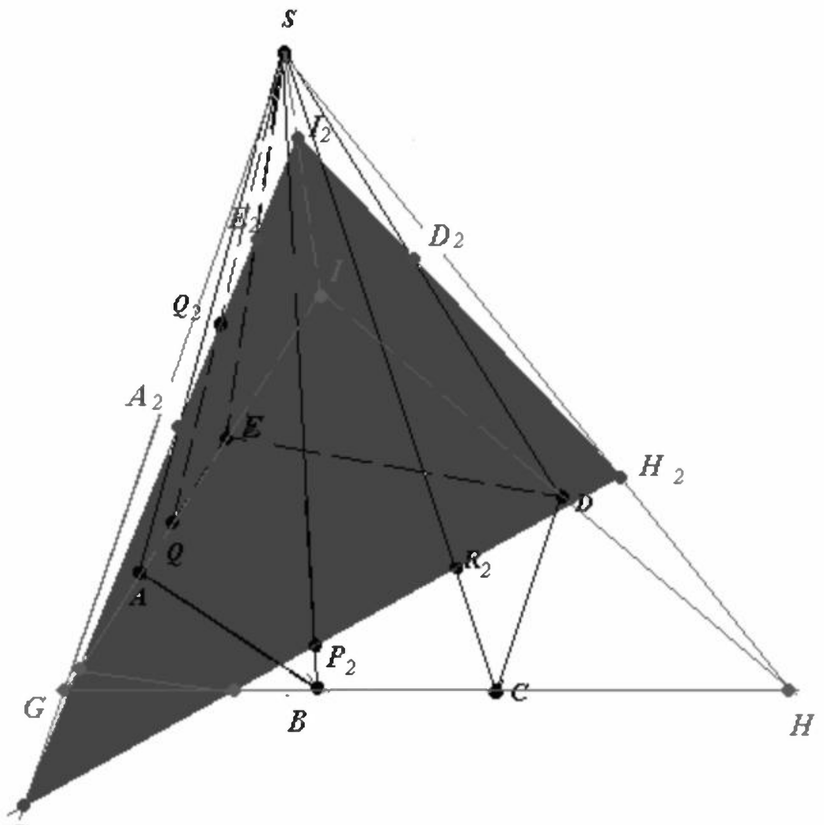


Рис. 34.

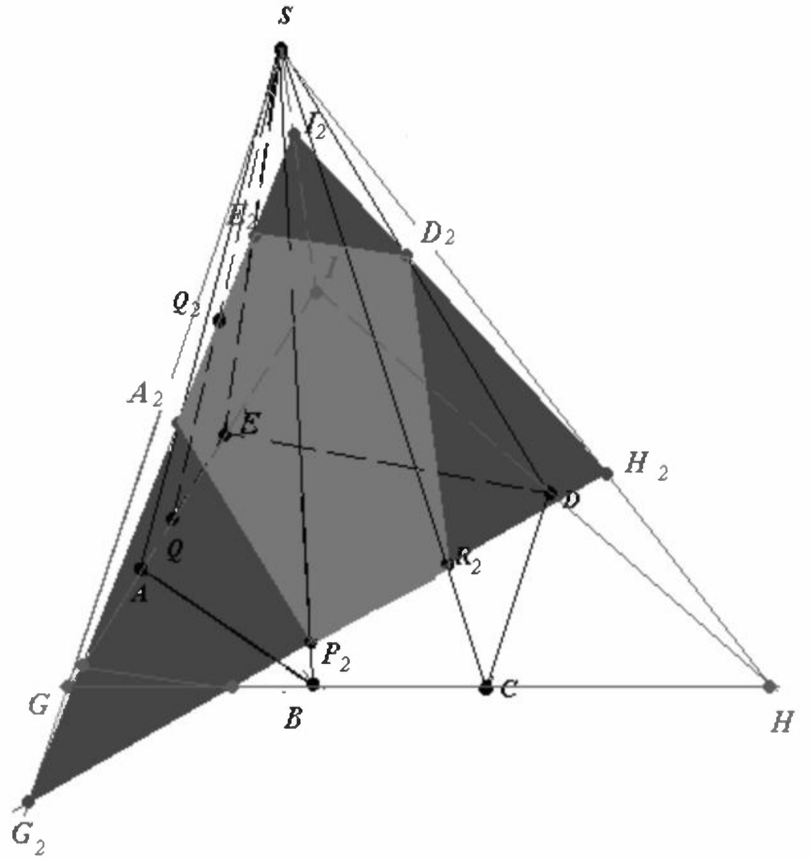


Рис. 35.

Метод паралельних прямих

Алгоритм методу

1. Перевіряємо повноту зображення.
2. Враховуючи, що лінії перетину паралельних площин січною площиною паралельні, то, маючи лінію перерізу на одній з паралельних площин і точку на іншій, будуємо пряму, інцидентну цій точці і паралельну лінії перерізу першої площини.
3. Визначаємо площину шуканого перерізу.

Задача 10. Використовуючи метод паралельних прямих, побудувати переріз призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площиною $P_2Q_2R_2$, якщо $P_2 \in [BB_1]$, $Q_2 \in (AA_1F_1F)$, $R_2 \in (CC_1D_1D)$ (рис. 36).

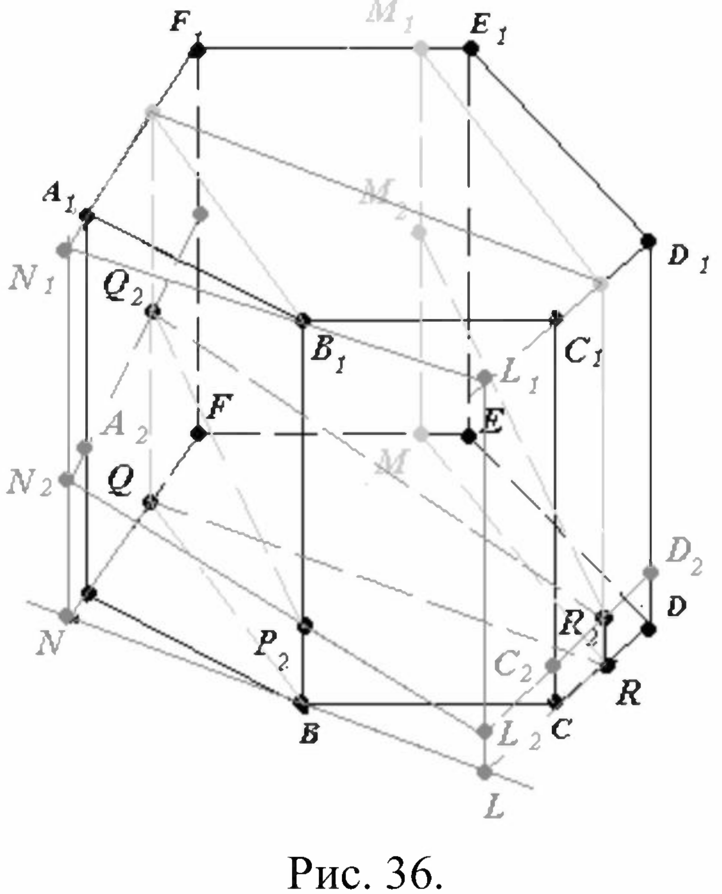


Рис. 36.

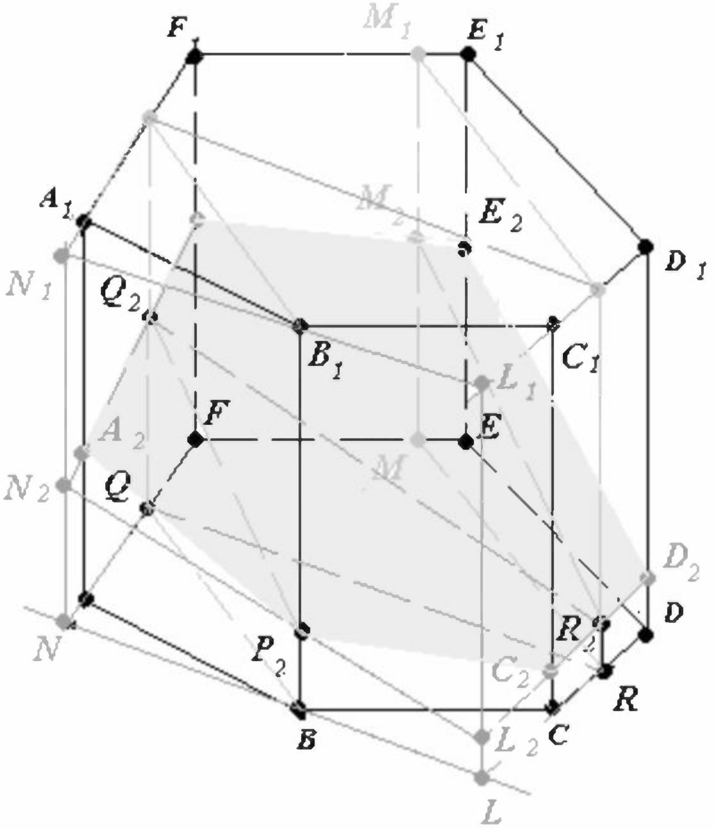


Рис. 37.

1. Q – проєкція точки Q_2 на площину основи піраміди,
   B – проєкція точки P_2 на площину основи піраміди,
   R – проєкція точки R_2 на площину основи піраміди.
   Зображення (рис. 36) повне.
2. Побудуємо $(R_2RM)\|(P_2BQ)$ та $(R_2M_2)\|(P_2Q_2)$ (рис. 36).
   Побудуємо $(N_1NB)\|(Q_2QR_2)$, $(N_1NB)\cap(D_1DC)=(LL_1)$
   та $(P_2N_2)\|(R_2Q_2)$, $(P_2N_2)\cap(LL_1)=L_2$
   $(N_2Q_2)\cap(AA_1)=A_2$, $(N_2Q_2)\cap(FF_1)=F_2$,
   $(L_2R_2)\cap(DD_1)=D_2$, $(L_2R_2)\cap(CC_1)=C_2$,
   $(L_2R_2)\cap(CC_1)=C_2$, $(F_2M_2)\cap(EE_1)=E_2$ (рис. 37).
3. Шуканий переріз – шестикутник $A_2P_2C_2D_2E_2F_2$.

Задача 11. Методом паралельних прямих побудувати переріз піраміди $SABCDE$ площиною $P_2Q_2R_2$, якщо $P_2\in[SB]$, $Q_2\in(AES)$, $R_2\in[SC]$ (рис. 38).

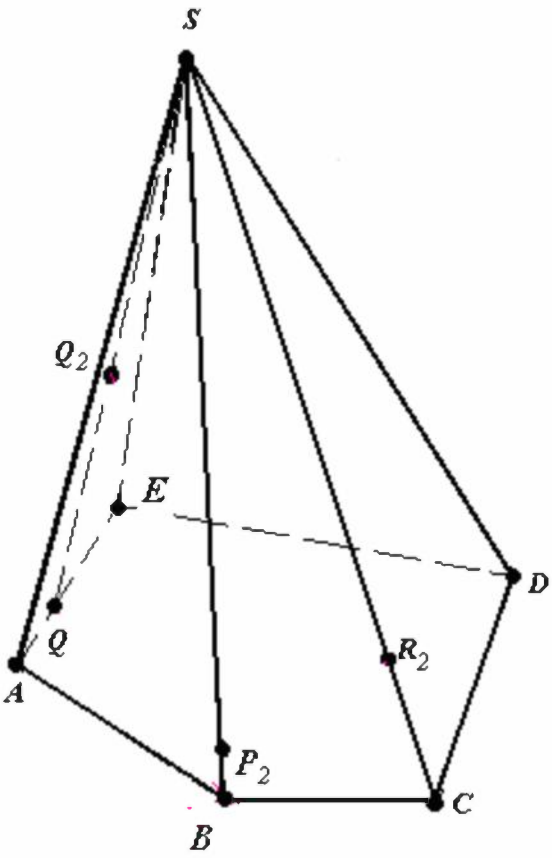


Рис. 38.

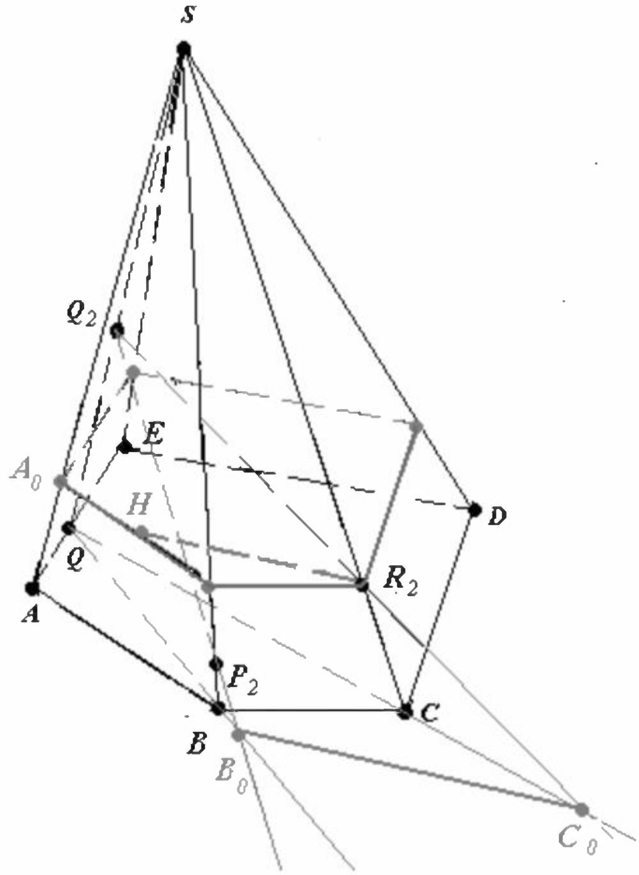


Рис. 39.

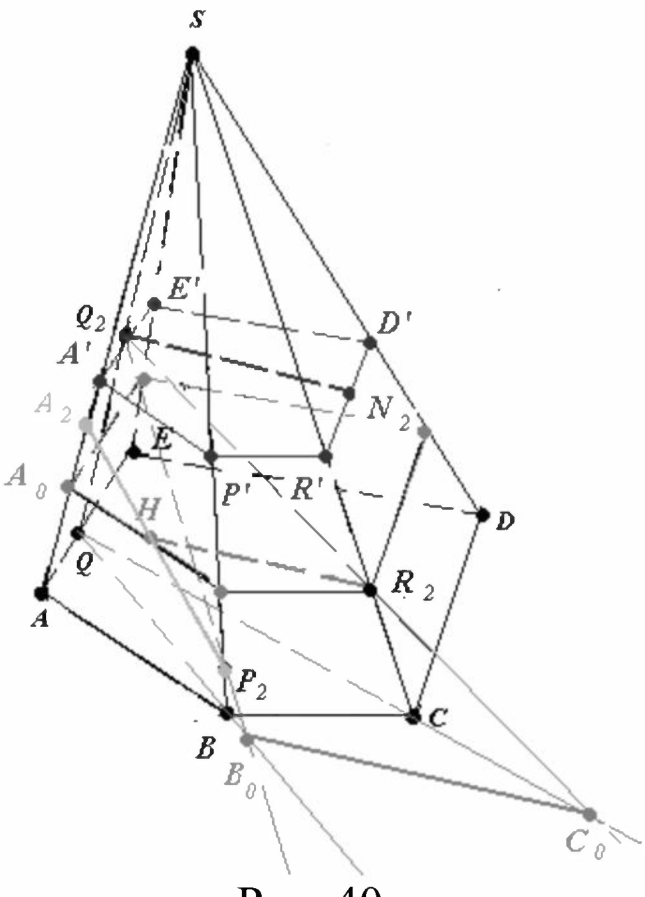


Рис. 40.

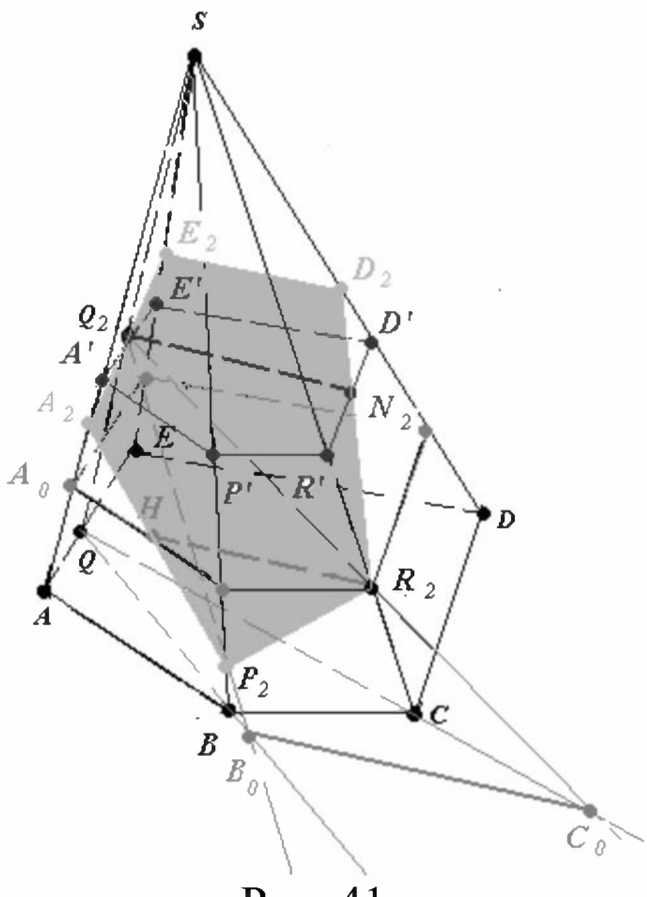


Рис. 41.

1. Q – проєкція точки Q_2 на площину основи піраміди,
   B – проєкція точки P_2 на площину основи піраміди,
   C – проєкція точки R_2 на площину основи піраміди.
   Зображення (рис. 38) повне.
2. Через R_2 проведемо $\mu \| (ABC)$
   проведемо $(R_2H) \| (B_0C_0)$, де $B_0 = (P_2Q_2) \cap (BQ)$, $C_0 = (Q_2R_2) \cap (CQ)$ (рис. 39).
   Через Q_2 проведемо $\beta \| (ABC)$
   $\beta \cap (P_2Q_2R_2) = (N_2Q_2)$ (рис. 40).
   $(N_2R_2) \cap (SD) = D_2$, $(P_2H) \cap (SA) = A_2$, $(A_2Q_2) \cap (SE) = E_2$ (рис. 41).
3. Шуканий переріз – п'ятикутник $A_2P_2R_2D_2E_2$.

Висновки

Наприкінці все одно залишається запитання: який з методів побудови плоских перерізів многогранників є оптимальним? Для відповіді спробуємо порівняти, наприклад, метод слідів та метод внутрішнього проєктування. Проведемо практичне дослідження. Змінивши розміщення заданих точок P_2, Q_2, R_2 в умові задачі (рис. 42), бачимо, що для побудови перерізу метод слідів у цьому випадку застосувати неможливо:

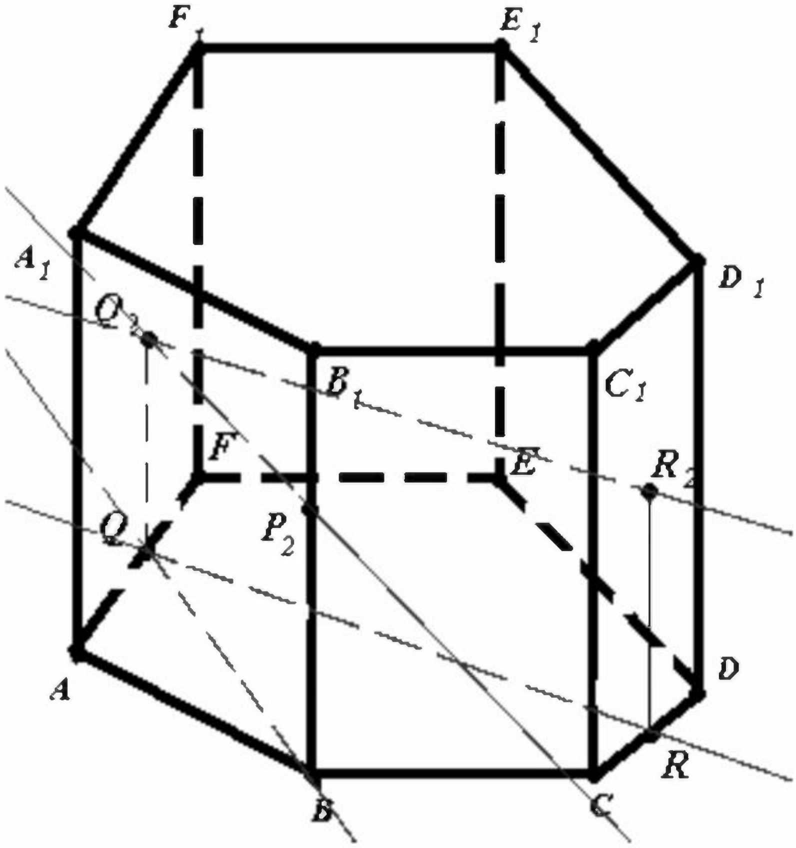


Рис. 42.

Отже, в даному випадку доцільно надавати перевагу вивченню методу внутрішнього проєктування.

Список використаних інформаційних джерел

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Учебное пособие для студентов физ.-мат. факультетов педагогических институтов. В 2 ч. Ч. 2. // Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. М.: Просвещение, 1987. С.119-125.
2. Бевз Г.П. та ін. Геометрія: 11 клас: підр. для ЗОНЗ (академічний рівень, профільний рівень) / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. Київ: Генеза, 2011. 336 с.
3. Болтянский В.Г. Элементарная геометрия. Кн. Для учителя / В.Г. Болтянский. М.: Просвещение, 1985. 320 с.
4. Буцикіна Н. Побудова перерізів многогранників [Електронний ресурс] / Н. Буцикіна // YouTube, 2017. URL: https://www.youtube.com/watch?v=ZaUrgVkkYHQ
5. Галайтата С. Перерізи многогранників [Електронний ресурс] / С. Галайтата // YouTube, 2012. URL: https://www.youtube.com/watch?v=1xuZ_gX2e3E
6. Гольдберг Я.Е. С чего начинается решение стереометрической задачи: Пособие для учителя. К.: Рад. шк., 1990.
7. Грушко Н. Побудова перерізів [Електронний ресурс] / Н. Грушко // Geogebra. URL: https://www.geogebra.org/m/mt8JVcQj
8. Жовнір Я.М. Позиційні задачі в стереометрії: Посібник для вчителя / Я.М. Жовнір. К.: Освіта, 1991.
9. Іванчук О. С. Побудова перерізів многогранників (позиційні задачі) [Електронний ресурс] / О. С. Іванчук. URL: https://naurok.com.ua/metodichniy-posibnik-pobudova-pereriziv-mnogogrannikiv-poziciyni-zadachi-27068.html
10. Конфорович Ф.Г. Математичні софізми і парадокси / Ф.Г. Конфорович. К.: Рад. школа, 1983.
11. Костенко Н. Побудова перерізів многогранників. Урок 1 [Електронний ресурс] / Н. Костенко // YouTube, 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=W9ijMA4LOJg

12. Костенко Н. Побудова перерізів многогранників. Урок 2 [Електронний ресурс] / Н. Костенко // YouTube, 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=UcHZl7KX0d8
13. Костенко Н. Побудова перерізів многогранників. Урок 3 [Електронний ресурс] / Н. Костенко // YouTube, 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=JqlLHo3hvA4
14. Маліс С. Побудова перерізів методом внутрішнього проєктування [Електронний ресурс] / С. Маліс // YouTube, 2019. URL:https://www.youtube.com/watch?v=e_Iv2Ke70Ho
15. Маліс С. Побудова перерізів методом слідів [Електронний ресурс] / С. Маліс // YouTube, 2019. URL: https://www.youtube.com/watch?v=oWmT0RcNAAo
16. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: Підручник дллп 10-11 класів середньої школи. 2-ге вид. / О.В. Погорєлов.- К.: Освіта, 1995. 128 с.
17. Савченко В.М. Изображение фигур в математике / В.М. Савченко. К.: «Вища школа», 1978.
18. Сидорук В.А. Побудова перерізів многогранників [Електронний ресурс] / В.А. Сидорук // Geogebra. URL: https://www.geogebra.org/m/Jd4va4rs
19. Стрельченко Н. Внутрішнє проєктування [Електронний ресурс] / Н. Стрельченко // YouTube, 2011. URL: https://www.youtube.com/watch?v=8_CWrnaqv_s
20. Стрельченко Н. Переріз паралелепіпеда [Електронний ресурс] / Н. Стрельченко // YouTube, 2011. URL: https://www.youtube.com/watch?v=scLwsA78NbQ
21. Табунова О. Побудова перерізів многогранників. Метод слідів [Електронний ресурс] /О.Табунова // YouTube, 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=TJoOC 1JAs2 c
22. Токар Н.Г., Вельдбрехт Д.О. Правильні многогранники / Н.Г. Токар, Д.О. Вельдбрехт // Математика. 2002. № 22-23 (177-178). С.126-128.
23. Черкасов Р.С., Столяр А.А. Методика викладання математики в середній школі / Р.С. Черкасов, А.А. Столяр/ Х.: «Основа», 1992.